Barajul nr. 1 pentru JBMO
10 martie 2022

Problema 1. Dacă a şi b sunt numere naturale nenule cu proprietatea că $\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$ este număr întreg, demonstraţi că şi numărul $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^3}$ este întreg.

Problema 2. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia $x \cdot [x] + 2022 = [x^2]$.

Problema 3. Fiecare dintre cei 29 de participanţi la o petrecere poartă o pălărie. Sunt trei tipuri de pălării.
Spunem despre o persoană că este *norocoasă* dacă printre prietenii săi există cel puţin doi care poartă tipuri diferite de pălării.
Demonstraţi că este întotdeauna posibil să înlocuim pălăria unuia dintre participanţi cu o pălărie de un alt tip fără ca numărul persoanelor norocose să scadă.

Problema 4. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD})$. Dreptele AD şi BC se intersectează în punctul P, iar paralela prin P la AB intersectează BD în T. Arătaţi că

$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{PCT}).$$