BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 26 martie 2022 (barajul 3)

Problema 1. Demonstrați că pentru fiecare număr natural k, cel puțin unul dintre numerele întregi

$$2k-1, \quad 5k-1 \quad \text{și} \quad 13k-1$$

nu este un pătrat perfect.

Problema 2. Într-un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A) = 80^\circ$ și $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$, bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle C$ intersectează latura AB în punctul D. Paralela prin D la latura AC intersectează latura BC în punctul E.
Aflați măsura unghiului $\sphericalangle EAB$.

Problema 3. Dacă a, b, c sunt numerele reale pozitive cu $abc = 1$, demonstrați că
(a) $2\left(\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{ab+bc+ca}$
(b) $2\left(\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

Problema 4. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 10$ sunt scrise pe tablă. La fiecare pas, Andreas alege două numere α, β care sunt scrise pe tablă, astfel încât $\alpha \geq 2\beta$, el le șterge și în locul lor scrie numărul $\alpha - 2\beta$.
Găsiți toate numerele n pentru care este posibil ca, după o succesiune de pași precum cei de mai sus, pe tablă să rămână scris doar numărul n.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Demonstrați că pentru fiecare număr natural k, cel puțin unul dintre numerele întregi

$$2k-1, \quad 5k-1 \quad \text{și} \quad 13k-1$$

nu este un pătrat perfect.

Soluţie: (*Orestis Lignos*, pe mathematica.gr)
Să presupunem prin absurd că ar exista x, y, z numere naturale astfel încât $2k-1 = x^2$, $5k-1 = y^2$, $13k-1 = z^2$.
Tratând cazurile $n = 8j$, $8j \pm 1$, $8j \pm 2$, $8j \pm 3$, $8j+4$, se arată uşor că un pătrat perfect dă unul dintre resturile 0, 1, 4 sau 9 la împărţirea la 16. Cum x este impar, $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, deci $k \equiv 1 \pmod 4$. Distingem atunci cazurile:
• $x \equiv 1 \pmod{16}$; atunci $z^2 = 13k-1 \equiv 12 \pmod{16}$, imposibil;
• $x \equiv 5 \pmod{16}$; atunci $y^2 = 5k-1 \equiv 8 \pmod{16}$, imposibil;
• $x \equiv 9 \pmod{16}$; atunci $y^2 = 13k-1 \equiv 12 \pmod{16}$, imposibil;
• $x \equiv 13 \pmod{16}$; atunci $z^2 = 13k-1 \equiv 8 \pmod{16}$, imposibil.
În concluzie, niciunul dintre cazuri nu este posibil, adică presupunerea făcută este falsă.

Problema 2. Într-un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A) = 80°$ și $m(\sphericalangle B) = 60°$, bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle C$ intersectează latura AB în punctul D. Paralela prin D la latura AC intersectează latura BC în punctul E.
Aflați măsura unghiului $\sphericalangle EAB$.

Soluţie: (user *Doloros* pe mathematica.gr)
Paralelele prin A şi E la CD, respectiv AB, se intersectează în T.
Un calcul simplu de unghiuri arată că $m(\sphericalangle ADC) = 80° = m(\sphericalangle DAC)$, deci $CA = CD$. Cum $m(\sphericalangle DAT) = 100° = m(\sphericalangle ADE)$, $ADET$ este trapez isoscel. Deducem că triunghiurile CAT şi CDE sunt congruente (LUL), deci triunghiul CTE este isoscel şi are $m(\sphericalangle CET) = 60°$, deci CTE este triunghi echilateral. Deducam că $TA = TE$ deci măsurile unghiurilor triunghiului TAE sunt $80°, 50°, 50°$.
Conchidem că $m(\sphericalangle EAB) = m(\sphericalangle TEA) = 50°$.

Problema 3. Dacă a, b, c sunt numerele reale pozitive cu $abc = 1$, demonstrați că
(a) $2\left(\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{ab+bc+ca}$
(b) $2\left(\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a}\right) \geq \dfrac{9}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

Soluţie: (*Claudia-Anamaria Drăgoi şi Marius-Valentin Drăgoi*)
(a) Avem $2\sum_{cyc}\dfrac{ab}{a+b} = 2\sum_{cyc}\dfrac{abc}{ac+bc} = 2\sum_{cyc}\dfrac{1}{ac+bc} \overset{CBS}{\geq} \dfrac{9}{ab+bc+ca}$.

(b) Conform (a), este suficient să demonstrăm că $ab + bc + ca \le a^2b + b^2c + c^2a$. Din inegalitatea mediilor avem $a^2b+a^2b+b^2c \ge 3\sqrt[3]{a^2b \cdot a^2b \cdot b^2c} = \sqrt[3]{abc \cdot a^3b^3} = ab$. Scriind încă două relaţii analoage şi însumându-le obţinem $3(a^2b + b^2c + c^2a) \ge 3(ab + bc + ca)$, de unde concluzia.

Problema 4. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 10$ sunt scrise pe tablă. La fiecare pas, Andreas alege două numere α, β care sunt scrise pe tablă, astfel încât $\alpha \ge 2\beta$, el le șterge și în locul lor scrie numărul $\alpha - 2\beta$.
Găsiți toate numerele n pentru care este posibil ca, după o succesiune de pași precum cei de mai sus, pe tablă să rămână scris doar numărul n.

Soluţie: (*Orestis Lignos*, pe mathematica.gr)
La un pas, suma tuturor numerelor de pe tablă scade cu 3β, deci rămâne neschimbată modulo 3. Cum iniţial suma era $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55 \equiv 1 \pmod 3$, şi la sfârşit, când pe tablă rămâne un singur număr, acesta trebuie să fie congruent cu $1 \pmod 3$. De asemenea, pe tablă nu vom avea decât numare naturale mai mici sau egale cu 10. Aşadar, $n \in \{1, 4, 7, 10\}$.
Vom demonstra că ultimul număr rămas pe tablă poate fi oricare din aceste patru numere dând câte un exemplu de succesiune de paşi.

• $n = 1$:
$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \xrightarrow{10-2\cdot1=8} 2,3,4,5,6,7,8,8,9 \xrightarrow{5-2\cdot2=1} 1,3,4,6,7,8,8,9 \xrightarrow{3-2\cdot1=1} 1,4,6,7,8,8,9 \xrightarrow{4-2\cdot1=2} 2,6,7,8,8,9 \xrightarrow{6-2\cdot2=2} 2,7,8,8,9 \xrightarrow{7-2\cdot2=3} 3,8,8,9 \xrightarrow{8-2\cdot3=2} 2,8,9 \xrightarrow{8-2\cdot2=4} 4,9 \xrightarrow{9-2\cdot4=1} 1$

• $n = 7$:
$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \xrightarrow{10-2\cdot1=8} 2,3,4,5,6,7,8,8,9 \xrightarrow{5-2\cdot2=1} 1,3,4,6,7,8,8,9 \xrightarrow{4-2\cdot1=2} 2,3,6,7,8,8,9 \xrightarrow{6-2\cdot2=2} 2,3,7,8,8,9 \xrightarrow{8-2\cdot2=4} 3,4,7,8,9 \xrightarrow{9-2\cdot3=3} 3,4,7,8 \xrightarrow{7-2\cdot3=1} 1,4,8 \xrightarrow{4-2\cdot1=2} 2,8 \xrightarrow{8-2\cdot2=4} 4$

• $n = 7$:
$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \xrightarrow{10-2\cdot1=8} 2,3,4,5,6,7,8,8,9 \xrightarrow{5-2\cdot2=1} 1,3,4,6,7,8,8,9 \xrightarrow{4-2\cdot1=2} 2,3,6,7,8,8,9 \xrightarrow{6-2\cdot2=2} 2,3,7,8,8,9 \xrightarrow{8-2\cdot2=4} 3,4,7,8,9 \xrightarrow{9-2\cdot3=3} 3,4,7,8 \xrightarrow{8-2\cdot3=2} 2,4,7 \xrightarrow{4-2\cdot2=0} 0,7 \xrightarrow{7-2\cdot0=7} 7$

• $n = 10$:
$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \xrightarrow{4-2\cdot2=0} 0,1,3,5,6,7,8,9,10 \xrightarrow{9-2\cdot1=7} 0,3,5,6,7,7,8,10 \xrightarrow{8-2\cdot3=2} 0,2,5,6,7,7,10 \xrightarrow{7-2\cdot2=3} 0,3,5,6,7,10 \xrightarrow{7-2\cdot3=1} 0,1,5,6,10 \xrightarrow{5-2\cdot1=3} 0,3,6,10 \xrightarrow{6-2\cdot3=0} 0,0,10 \xrightarrow{0-2\cdot0=0} 0,10 \xrightarrow{10-2\cdot0=10} 10.$