Recomandat și avizat de
Societatea de Științe Matematice

UPPER.SCHOOL FOR
INTERNATIONAL MATH CONTESTS 2021 - 2022
- Editia a III-a -

Secțiunea Juniori
Simulare 2 - Baraj juniori
6 martie 2022

- Soluții -

Selecție probleme
Andrei Eckstein, Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Fie $p \geq 3$ un număr prim. Să se arate că numerele

$$7^1+9^1, 7^2+9^2, \ldots, 7^{p-1}+9^{p-1}$$

nu pot da resturi distincte la împărțirea cu p.

Vlad Matei

Demonstrație. Pentru $p=3$ numerele 7^1+9^1 și 7^2+9^2 dau rest 1 la împărțirea cu 3.
Pentru $p=7$ numerele 7^1+9^1 și 7^4+9^4 dau rest 2 la împărțirea cu 7.
Să presupunem prin absurd că pentru un număr prim $p \geq 5$, $p \neq 7$, numerele $7^1+9^1, 7^2+9^2, \ldots, 7^{p-1}+9^{p-1}$ dau $n-1$ resturi distincte dintre cele n resturi posibile la împărțirea cu p.
Suma tuturor resturilor posibile este $0+1+\ldots+(p-1)=p\cdot\frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod p$, în vreme ce suma $7^1+9^1+7^2+9^2+\ldots+7^{p-1}+9^{p-1}=7\cdot\frac{7^{p-1}-1}{6}+9\cdot\frac{9^{p-1}-1}{8} \equiv 0 \pmod p$.
Am folosit mica teoremă a lui Fermat și faptul că $(p,6)=(p,8)=1$.
Deducem că restul care trebuie să lipsească este 0.
Pe de altă parte, $7^{p-1}+9^{p-1} \equiv 1+1=2 \pmod p$, iar $9^{(p-1)/2}=3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ și $7^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod p$ deci, pentru ca numerele $7^{p-1}+9^{p-1}$ și $7^{(p-1)/2}+9^{(p-1)/2}$ să dea resturi diferite la împărțirea cu p, este necesar să avem $7^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. Dar atunci $7^{(p-1)/2}+9^{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p$, contradicție.

Barem:

- cazurile $p=3$ și $p=7$ 1p
- Presupunând resturi distincte, restul care lipsește este 0. . . . . 3p
- $7^{p-1}+9^{p-1} \equiv 2 \pmod p$ 1p
- $7^{(p-1)/2}+9^{(p-1)/2} \equiv 0, 2 \pmod p$ 2p

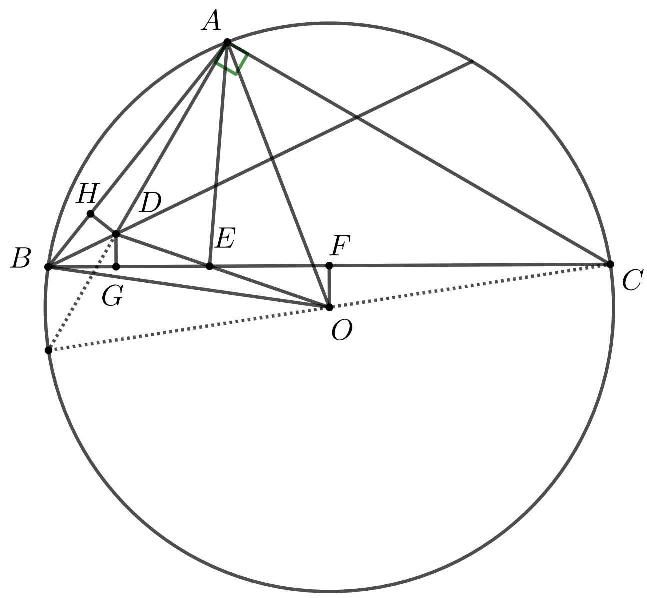
□

Problema 2

Fie ABC un triunghi obtuzunghic în A, cu O centrul cercului circumscris. Fie punctul D în interiorul triunghiului, pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ și pe perpendiculara în A pe AC. Segmentele (BC) și (OD) se intersectează în E. Arătați că $(AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle OAD$.

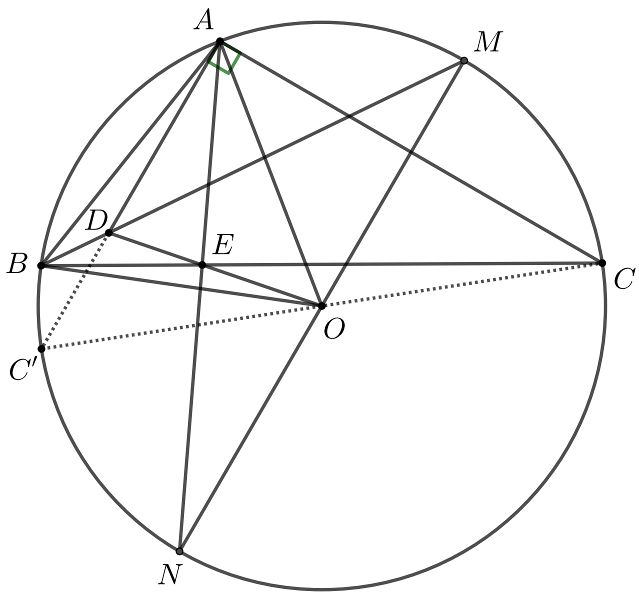
David Andrei Anghel

Demonstrație. Fie F, G, respectiv H proiecțiile lui O pe BC (mijlocul lui BC), a lui D pe BC, respectiv a lui D pe AB. Din Teorema fundamentală a asemănării avem $\Delta\, EFO \sim \Delta\, EGD$, deci $\frac{ED}{EO}=\frac{DG}{OF}$. De asemenea, $DG=DH$ pentru că D este pe bisectoare și triunghiurile DHA și OFB sunt asemenea pentru că au unghiuri drepte în H și F, iar $\sphericalangle DAH=\sphericalangle BAC-90^\circ=\sphericalangle OBC=\sphericalangle OBF$. Cum $OB=OA$ (raze), avem $\frac{ED}{EO}=\frac{DG}{OF}=\frac{DH}{OF}=\frac{AD}{OB}=\frac{AD}{AO}$, deci din reciproca teoremei bisectoarei rezultă concluzia.



Demonstrație alternativă: Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile ABD, BDE și EOC obținem relațiile: $\dfrac{ED}{BD} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin(\sphericalangle DEB)}$, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\sin(\sphericalangle BAD)}$ și $\dfrac{CO}{OE} = \dfrac{\sin(\sphericalangle CEO)}{\sin(\sphericalangle BCO)}$. Dar $\sphericalangle CEO \equiv \sphericalangle DEB$, iar $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCO$ (calcul de unghiuri sau observând că $(AD$ taie cercul circumscris în punctul diametral opus lui C). Obținem de aici că $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{CO}{OE} = \dfrac{AO}{OE}$. Din reciproca teoremei bisectoarei rezultă imediat concluzia.

Demonstrație alternativă: (dată în concurs de *Andrei Vila*)
Fie M mijlocul arcului mic AC, N punctul diametral opus acestuia și C' punctul diametral opus lui C. Atunci $\{D\} = BM \cap AC'$ și $\{O\} = CC' \cap MN$. Fie $\{E'\} = AN \cap BC$. Din teorema lui Pascal aplicată hexagramei $BMNAC'C$ rezultă că punctele D, O și E' sunt coliniare deci E' coincide cu E.
Deoarece $MN \parallel AC'$ (ambele perpendiculare pe AC), avem $\sphericalangle DAE = \sphericalangle C'AN \equiv \sphericalangle ABM = \dfrac{B}{2}$ și $\sphericalangle EAO = \sphericalangle NAO \equiv \sphericalangle ANO \equiv \sphericalangle ABM = \dfrac{B}{2}$, de unde concluzia.



Barem:

- Arată că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CBO$ (sau cu $\sphericalangle BCO$). 1p
- Arată că $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AO}{OE}$. . . . . 5$p$
- concluzia 1p

□

Problema 3

Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care pătrățelele unui tabel $n \times n$ pot fi completate cu numere din mulțimea $\{1, 2, -3\}$ astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană a tabelului să fie 0.

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2021

Demonstrație. Arătăm că numerele căutate sunt numerele naturale mai mari ca 2.
Evident $n = 1$ nu are proprietatea cerută. Nici $n = 2$ nu o are: dacă -3 apare pe o linie a tabelului, suma numerelor de pe acea linie este negativă, iar dacă -3 nu apare pe acea linie, suma este pozitivă.
În continuare arătăm că orice număr natural mai mare ca 2 are proprietatea din enunț.
Demonstrăm că, pentru orice $n \geq 3$, există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, 2, -3\}$ astfel ca $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.
Într-adevăr, dacă $n = 3k$, putem lua câte k numere egale cu 1, 2 și -3.
Dacă $n = 3k + 1$, $k \geq 1$, putem lua $k + 2$ numere egale cu 1, $k - 1$ numere egale cu 2 și k numere egale cu -3.
Dacă $n = 3k + 2$, $k \geq 1$, putem lua $k - 1$ numere egale cu 1, $k + 2$ numere egale cu 2 și $k + 1$ numere egale cu -3.
Pentru $n \geq 3$ completăm tabelul în felul următor:
- pe linia 1 scriem, în ordine, numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
- pe linia 2 scriem, în ordine, numerele $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1$;
în general,
- pe linia k scriem, în ordine, numerele $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_{k-1}$.
(Pe scurt, pe linia i coloana j scriem numărul a_t unde $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ satisface $t \equiv i + j - 1 \pmod{n}$.)
Astfel, pe fiecare linie și fiecare coloană vom obține aceeași sumă, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.

Barem:

- Afirmă că $n = 1$ și $n = 2$ nu convin. (Observație: La cazul $n = 2$ nu este necesară justificarea.) 1p
- Arată că numerele $n \geq 3$ convin. (Observație: Pentru cazul $3 \mid n$ se acordă 1p.) 6p

□

Problema 4

Fie A o mulțime de numere naturale nenule care are următoarele proprietăți:
i) $5 \in A$;
ii) dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$, atunci $x^2 + y^2 \in A$ dacă și numai dacă $x \in A$ și $y \in A$.
Demonstrați că $A = \mathbb{N}^*$.

Andrei Bâra

Demonstrație. Vom verifica mai întâi că numerele $1, 2, \ldots, 11$ aparțin mulțimii A.
• $1^2 + 2^2 = 5 \in A \Rightarrow 1, 2 \in A$
• $1^2 + 5^2 = 26 \in A$ implică $26^2 + 2^2 = 680 \in A$, dar $680 = 22^2 + 14^2$, deci $22, 14 \in A$.
• $14^2 + 2^2 = 200 \in A$ și $200 = 10^2 + 10^2$ implică $10 \in A$.
• $10 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow 3 \in A$
• $2 \in A \Rightarrow 2^2 + 2^2 = 8 \in A \Rightarrow 8^2 + 1^2 = 65 \in A \Leftrightarrow 7^2 + 4^2 \in A \Rightarrow 7, 4 \in A$
• $14^2 + 3^2 = 205 = 6^2 + 13^2 \Rightarrow 6, 13 \in A$
• $6^2 + 7^2 = 85 \in A$ și $85 = 9^2 + 2^2$ implică $9 \in A$
• $10, 5 \in A \Rightarrow 10^2 + 5^2 = 125 \in A$, $125 = 11^2 + 2^2$ implică $11 \in A$.
Am obținut că $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \in A$.
(Există și alte moduri de a arăta că numerele de la 1 la 11 sunt în A. De exemplu: ca mai sus, $1, 2, 8, 7, 4 \in A$, apoi $1^2 + 4^2 = 17 \in A$; $1^2 + 17^2 = 290 = 11^2 + 13^2$, deci $11, 13 \in A$; $11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$, deci $10, 5 \in A$; ca mai sus $3 \in A$; $3^2 + 11^2 = 130 = 9^2 + 7^2$, deci $9 \in A$; $9^2 + 2^2 = 85 = 6^2 + 7^2$, deci $6 \in A$.)

Demonstrăm că orice număr natural nenul este în A prin inducție tare.

Presupunem că $1, 2, \ldots, n \in A$ și demonstrăm că $n + 1 \in A$.

Cazul I. Dacă $n = 2k$, atunci $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (2k - 1)^2 + (k + 2)^2$, iar cum $2k - 1, k + 2, k - 2 \in A$, rezultă că $(2k - 1)^2 + (k + 2)^2 \in A$, deci $2k + 1 \in A$.
Inducția funcționează în acest caz pentru $k \geq 3$, adică $n \geq 6$, valoare care a fost verificată anterior.

Cazul II. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $(2k + 2)^2 + (k - 4)^2 = (2k - 2)^2 + (k + 4)^2$, iar cum $2k - 2, k + 4 \in A$, obținem $(2k - 2)^2 + (k + 4)^2 \in A$, rezultă, deci, deoarece $k - 4 \in A$, că $2k + 2 \in A$.
Inducția funcționează în acest caz pentru $k \geq 5$, adică $n \geq 11$, valoare care a fost verificată anterior.
Rezultă acum, evident, că $A = \mathbb{N}^*$.

Barem:

- Arată că $1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11 \in A$. (Observație: Pentru $1, 2, 4, 7, 8 \in A$ se acordă $0.5p$, iar pentru $3, 10, 11 \in A$ se acordă se acordă $0.5p$.) ... 1p
- Arată că $6, 9 \in A$. ... 1p
- Scrie identitățile necesare pasului de inducție. ... 4p
- concluzia ... 1p

$\square$

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.