



Recomandat și avizat de
Societatea de Științe Matematice



UPPER.SCHOOL FOR
INTERNATIONAL MATH CONTESTS 2021 - 2022
- Editia a III-a -

Secțiunea Juniori
Simulare 2 - Baraj juniori
6 martie 2022

- Subiecte -

Selecție probleme
Andrei Eckstein, Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $p \geq 3$ un număr prim. Să se arate că numerele

$$7^1 + 9^1, 7^2 + 9^2, \dots, 7^{p-1} + 9^{p-1}$$

nu pot da resturi distincte la împărțirea cu p .

Problema 2

Fie ABC un triunghi obtuzunghic în A , cu O centrul cercului circumscris. Fie punctul D în interiorul triunghiului, pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ și pe perpendiculara în A pe AC . Segmentele (BC) și (OD) se intersectează în E . Arătați că (AE) este bisectoarea unghiului $\sphericalangle OAD$.

Problema 3

Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care pătrățelele unui tabel $n \times n$ pot fi completate cu numere din mulțimea $\{1, 2, -3\}$ astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană a tabelului să fie 0.

Problema 4

Fie A o mulțime de numere naturale nenule care are următoarele proprietăți:

- i) $5 \in A$;
- ii) dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$, atunci $x^2 + y^2 \in A$ dacă și numai dacă $x \in A$ și $y \in A$.

Demonstrați că $A = \mathbb{N}^*$.

Timp de lucru: 240 de minute.

Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.

Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.