UPPER.SCHOOL FOR
INTERNATIONAL MATH CONTESTS 2021 - 2022
- Editia a III-a -

Secțiunea Juniori
Simulare 1 - Baraj juniori
19 decembrie 2021

- Soluții -

Selecție probleme
Andrei Eckstein

§1 Soluții

Problema 1

Pentru un număr natural nenul n notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor săi naturali. Aflaţi numerele naturale n pentru care $d(n) + d(n + 4) + d(n + 8) = 7$.

prelucrare *Andrei Eckstein*

Demonstrație. Observăm mai întâi că niciunul din termenii sumei nu poate fi egal cu 1 ($n = 1$ nu convine), deci termenii sumei trebuie să fie $2, 2, 3$ (într-o anumită ordine). Deducem că două dintre numerele n, $n + 4$ şi $n + 8$ trebuie să fie prime, iar cel de-al treilea trebuie să fie pătratul unui număr prim. Dar numerele n, $n + 4$ şi $n + 8$ dau resturi diferite la împărţirea cu 3, deci unul dintre cele trei numere este divizibil cu 3, adică unul dintre numere este 3 sau 9. Avem de verificat cazurile $n = 3$, $n = 9$, $n + 4 = 9$ şi $n + 8 = 9$. Se obţin soluţiile $n = 5$ şi $n = 9$.

Barem:

- Arată că termenii sumei sunt $2, 2, 3$. ($n = 1$ nu convine) .... $1p$
- Deduce că două dintre numere sunt prime, iar al treilea pătratul unui număr prim .... $1p$
- Unul dintre numerele n, $n + 4$ şi $n + 8$ este divizibil cu 3. .... $2p$
- Tratează toate cazurile. .... $2p$
- Obţine cele două soluţii. .... $1p$

□

Problema 2

Pentru $a, b, c > 0$ cu proprietatea $abc = 27$, arătaţi că

$$(a+b+c)^3\left(\frac{1}{a^3+216}+\frac{1}{b^3+216}+\frac{1}{c^3+216}\right) \geq 9.$$

Mihaela Berindeanu

Demonstrație. Folosim identitatea $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$.
Aplicăm inegalitatea mediilor și obținem

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \end{cases}$$

De aici avem că

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc = 8 \cdot 27 = 216$$

Deci $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+3\cdot 216 = (a^3+216)+(b^3+216)+(c^3+216)$.
Folosind notaţiile $a^3+216 = x,\ b^3+216 = y,\ c^3+216 = z$, obţinem inegalitatea clasică

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$

Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 3$.

Barem:

- arată că $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+3\cdot 216$ .... $3p$
- foloseşte inegalitatea $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$, $\forall x,y,z>0$ (*) .... $3p$
- concluzia .... $1p$

Nu se vor depuncta: netratarea cazului de egalitate, nedemonstrarea inegalităţii (*).
Punctele pentru (*) se vor acorda şi dacă inegalitatea $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+3\cdot 216$ nu a fost demonstrată. □

Problema 3

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, un număr natural fixat. Pătrăţelele unitate ale unei table $n \times n$ se completează cu numere naturale astfel încât modulul diferenţei numerelor scrise în oricare două pătrate unitate care au o latură comună să fie 1. Ce valori poate lua suma celor n^2 numere?

Andrei Eckstein

Demonstraţie. Vom arăta că dacă n este par atunci mulţimea valorilor pe care le ia suma este cea a numerelor pare mai mari sau egale cu $n^2/2$, iar dacă n este impar, mulţimea căutată este cea a numerelor mai mari sau egale cu $[n^2/2]$.
Numerele din pătrăţele vecine au parităţi diferite, deci, dacă n este par, adică $n=2k$ cu $k \in \mathbb{N}^*$, atunci vom avea $2k^2$ numere pare şi tot atâtea impare, prin urmare suma va fi mereu pară şi, mai mult, numerele impare fiind cel puţin 1, suma va fi un număr par mai mare sau egal cu $2k^2$. Vom arăta că orice număr par mai mare ca $2k^2$ poate fi suma numerelor din pătrat. Dacă plasăm 0 şi 1 ca într-o tablă de şah obţinem suma $2k^2$. De aici înainte putem mereu mări suma cu 2 astfel: alegem cel mai mic număr din pătrat. (Dacă sunt mai multe egale, alegem unul din ele.) Atunci toţi vecinii săi sunt cu 1 mai mari ca el, deci dacă mărim cu 2 acest număr, el va fi cu 1 mai mare decât vecinii săi, deci noua completare a tabelului satisface în continuare condiţia ca oricare două numere vecine să difere prin 1. Repetând procedeul obţinem orice sumă pară mai mare ca $2k^2$. Pe de altă parte, deoarece pătratul conţine $2k^2+2k$ numere impare, toate cel puţin 1, suma va fi cel puţin $2k^2+2k$.
Dacă n este impar, adică $n=2k+1$ cu $k \in \mathbb{N}^*$, putem obţine orice sumă mai mare sau egală cu $2k^2+2k$. Pentru sumele pare, completăm pătratul cu 0 şi 1 ca pe o tablă de şah, cu 0-uri în colţuri. Obţinem suma $2k^2+2k$ şi apoi, cu procedeul descris mai sus, orice sumă pară mai mare. Pentru sumele impare, pornim de la o completare cu 0 şi 1, tot model tablă de şah, dar cu 1-uri în colţuri. Numerele impare mai mari se obţin aplicând din nou procedeul.

Remarcă: În locul procedeului descris mai sus, se pot construi exemple. De pildă, în cazul n par, pentru a obţine suma $2s \in \left[\frac{(2k-1)n^2}{2}, \frac{(2k+1)n^2}{2}\right]$, $k \in \mathbb{N}^*$, putem colora tabla ca pe una de şah şi scrie k în toate pătrăţelele albe şi $k-1$ sau $k+1$ în cele negre astfel încât suma să dea $2s$. Analog se procedează în cazul n impar.

Barem:

- Arată că în cazul n par se obţin numai sume pare. .... $1p$
- Determină în fiecare caz sumele minime care se obţin. .... $1p$

- Arată că în cazul n par se obţin toate numerele pare $\geq n^2/2$, iar în cazul n impar toate numerele $\geq [n^2/2]$ .... $4p$

- Găseşte (sau intuieşte) răspunsul corect. .... $1p$

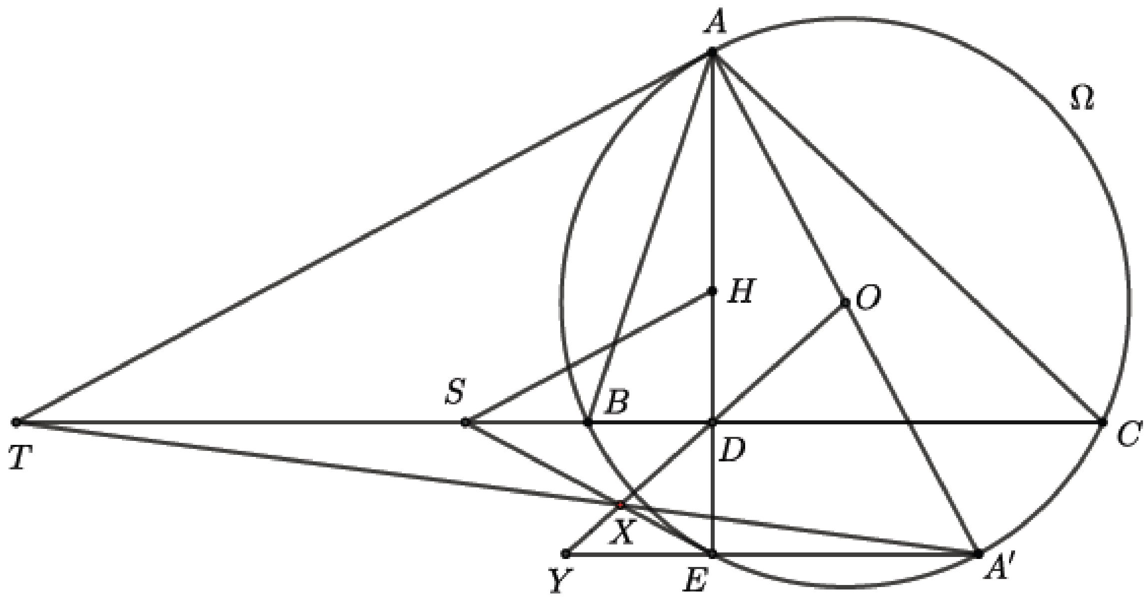
$\square$

Problema 4

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, cu $AB < AC$. Notăm cu Ω cercul circumscris triunghiului, iar cu O centrul acestui cerc. Tangenta în A la Ω intersectează BC în T, A' este punctul diametral opus lui A în Ω, iar perpendiculara din A pe BC intersectează BC şi Ω în D, respectiv E.
Demonstraţi că OD, TA' şi tangenta în E la Ω sunt concurente.

David Andrei Anghel

Demonstraţie. Să notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC, cu X şi Y punctele în care dreapta OD intersectează $A'T$, respectiv $A'E$ at X şi fie $\{S\} = EX \cap BC$. Vrem să demonstrăm că ES este tangentă la Ω. Se ştie că $A'E \parallel BC$ şi că $HD = DE$. Aplicăm teorema lui Menelaos triunghiului AEA' tăiat de transversala $D - Y - O$ şi obţinem că $\frac{AD}{DE} \cdot \frac{YE}{YA'} \cdot \frac{A'O}{OA} = 1$, de unde $\frac{YE}{YA'} = \frac{DE}{AD} = \frac{HD}{AD}$. (1)
Din $YA' \parallel TD$ rezultă $\frac{YE}{SD} = \frac{YX}{XD} = \frac{YA'}{DT}$, de unde $\frac{YE}{YA'} = \frac{SD}{DT}$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă $\frac{SD}{DT} = \frac{HD}{AD}$, deci $HS \parallel AT$. Atunci $\measuredangle SED = \measuredangle SHD = \measuredangle TAE = \frac{1}{2}\ \widehat{AE}$, ceea ce arată că SE este tangentă la Ω.



Se poate evita utilizarea teoremei lui Menelaos considerând simetricul lui D faţă de O.

Remarcă: (David Andrei Anghel)
Dacă $\{U\} = (A'T) \cap \Omega$, se poate arăta că dreapta UD reintersectează Ω în punctul diametral opus lui E. Există o demonstraţie folosind această idee, dar ea este ceva mai complicată (vezi baremul pentru soluţie alternativă).

Barem:

- Spune că $EA' \parallel BC$. 1p
- Consideră ortocentrul H şi spune că $HD = DE$. 1p
- Arată că $HS \parallel AT$. 4p
- Calculul de unghiuri din final şi concluzia (Acest punct din barem se acordă şi dacă paralelismul nu a fost demonstrat), ... 1p

Barem (soluţie alternativă)**:**

- Fie $\{R\} = (EO \cap \Omega$. Arată că $\Delta AA'R \sim \Delta ATD$ (UU) 1p
- Deduce că $\Delta RAD \sim \Delta A'AT$ (LUL) 1p
- Obţine că U, D, R sunt coliniare (calcul de unghiuri) 1p
- Fie M proiecţia lui E pe OX. $\Delta OMU \sim \Delta OUV$ (LUL) 1p
- Patrulaterul $DMUE$ este inscriptibil (calcul de unghiuri). 1p
- $\measuredangle DUE = 90°$ şi concluzia 2p

$\square$

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.