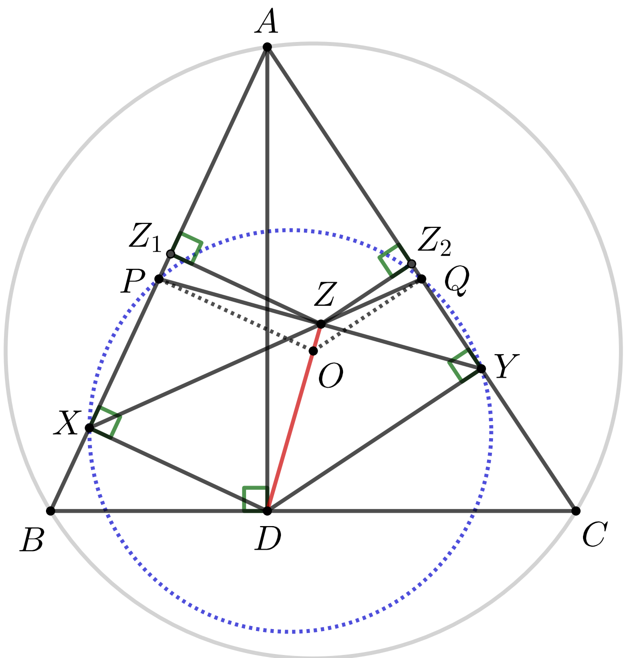
Problema săptămânii 293

Fie ABC un triunghi în care D este piciorul înălţimii din A, iar O este centrul cercului circumscris. Notăm cu P şi Q mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ şi cu X şi Y proiecţiile lui D pe AB, respectiv AC. Dacă $\{Z\} = QX \cap PY$, arătaţi că punctele D, O şi Z sunt coliniare.

Soluţie: (*Radu Stoleriu*)
Arătăm mai întâi că punctele P, Q, X, Y sunt conciclice.

Din teorema catetei, $AX \cdot AB = AD^2 = AY \cdot AC$. Împărţind la 2, obţinem $AX \cdot AP = AY \cdot AQ$ ceea ce, conform reciprocei teoremei puterii punctului, înseamnă că punctele P, Q, X, Y sunt conciclice.



Fie acum Z_1 şi Z_2 proiecţiile lui Z pe AB, respectiv AC. Deoarece $\sphericalangle Z_1PZ \equiv \sphericalangle Z_2QZ$ (vom considera cazul în care aceste unghiuri sunt ascuţite, cazul contrar fiind analog), triunghiurile dreptunghice ZZ_1P şi ZZ_2Q sunt asemenea, deci

$$\frac{Z_1P}{Z_2Q} = \frac{ZZ_1}{ZZ_2}, \qquad (1).$$

Deoarece $\sphericalangle Z_1XZ \equiv \sphericalangle Z_2YZ$, triunghiurile dreptunghice ZZ_1X şi ZZ_2Y sunt asemenea, deci

$$\frac{Z_1X}{Z_2Y} = \frac{ZZ_1}{ZZ_2}, \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{Z_1P}{Z_2Q} = \dfrac{Z_1X}{Z_2Y}$ şi $\dfrac{Z_1P}{PX} = \dfrac{Z_2Q}{QY}$, ceea ce implică faptul că punctele D, O, Z sunt coliniare.

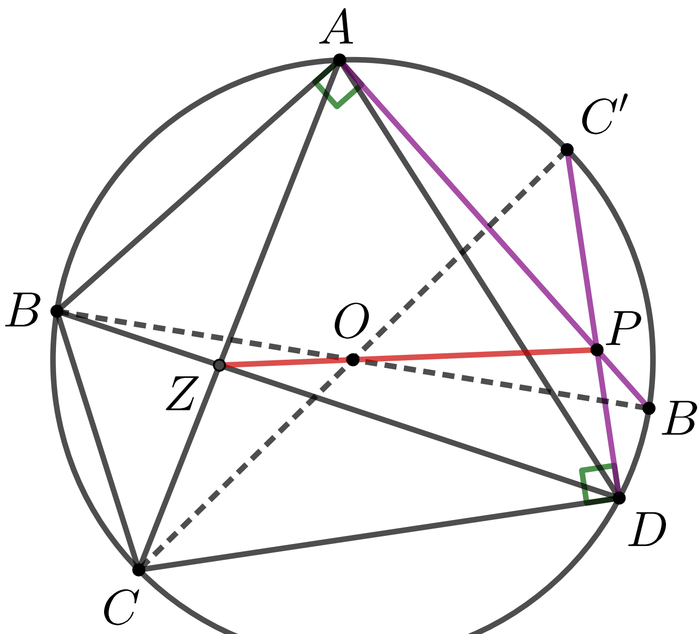
Într-adevăr, considerând punctul $O' \in (DZ)$ pentru care $\frac{ZO'}{O'D} = \frac{Z_1P}{PX} = \frac{Z_2Q}{QY} = k$, constatăm că proiecţiile acestuia pe AB şi AC sunt punctele care împart segmentele $[Z_1X]$, respectiv $[Z_2Y]$ în raport k, adică tocmai punctele P şi Q, ceea ce arată că $O' = O$.

Are loc următoarea **generalizare** (vezi aici):

Fie ABC un triunghi în care D este piciorul înălţimii din A. Considerăm $P \in (AB)$ şi $Q \in (AC)$ astfel încât $PQ \parallel BC$ şi fie X şi Y proiecţiile lui D pe AB, respectiv AC. Perpendicularele ridicate în P şi Q pe AB, respectiv AC, se intersectează în E. Dacă $\{Z\} = QX \cap PY$, arătaţi că punctele D, E şi Z sunt coliniare.

Pentru demonstraţie se poate folosi următoarea lemă (folosită şi la ultimul test upper.school, vezi soluţia lui *Andrei Vila*):

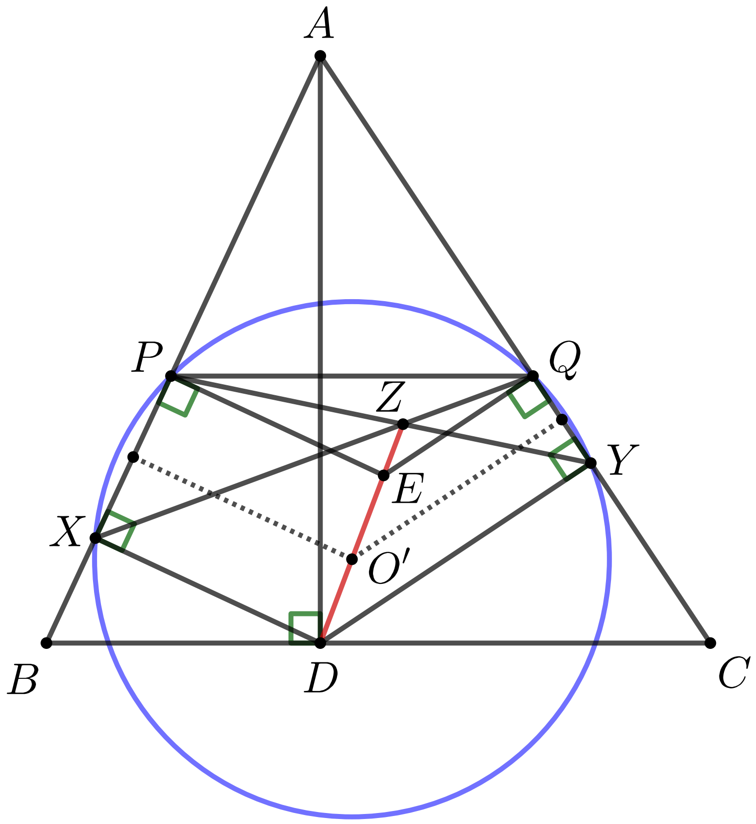
Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O şi Z punctul de intersecţie a diagonalelor. Perpendicularele în A pe AB şi în D pe CD se intersectează în P. Atunci punctele O, P, Z sunt coliniare.



Pentru demonstraţie, fie B' şi C' punctele diametral opuse punctelor B, respectiv C. Atunci $BB' \cap CC' = \{O\}$ şi $AB' \cap DC' = \{P\}$. Din teorema lui Pascal aplicată hexagramei $BB'ACC'D$ rezultă coliniaritatea cerută.

Revenind la generalizare, ca mai sus se arată că $AX \cdot AB = AY \cdot AC$. Înmulţind cu $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ rezultă că $AP \cdot AX = AQ \cdot AY$, deci P, Q, X, Y sunt conciclice. Fie O' centrul cercului circumscris triunghiului PQX. Din lemă rezultă că O', E,

Z sunt coliniare. Dar O' este intersecţia mediatoarelor segmentelor $[PX]$ şi $[QY]$, adică a dreptelor suport ale liniilor mijlocii ale trapezelor $EPXD$ şi $EDYQ$. Cu alte cuvinte, O' este mijlocul lui $[DE]$, deci punctele D, O', E, Z sunt coliniare.



Am primit soluţii de la *Radu Stoleriu* şi *Aida Mitroi*.

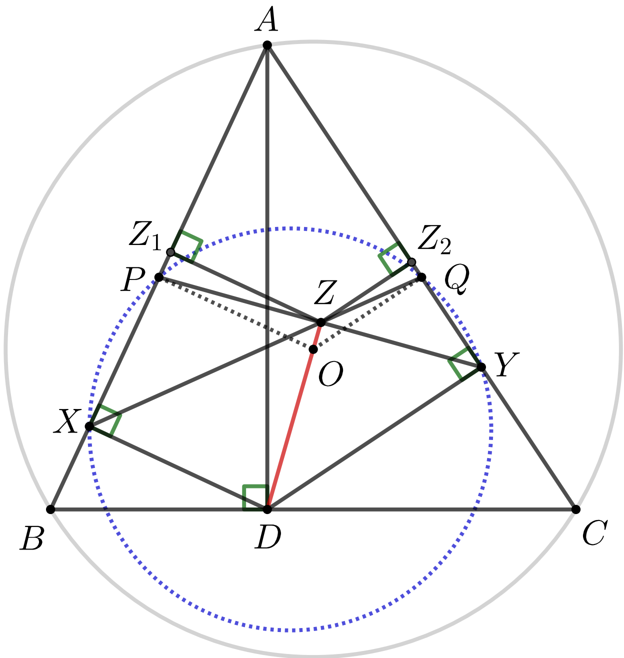
Problem of the week no. 293

Let ABC be a triangle, O its circumcenter and D the foot of the altitude from A. Let P and Q be the midpoints of sides AB and AC, respectively, and denote by X and Y the projections of D onto AB and AC respectively. If $\{Z\} = QX \cap PY$, prove that points D, O and Z are collinear.

Solution: (*Radu Stoleriu*)

First, we prove that P, Q, X, Y are co-cyclic.

We have $AX \cdot AB = AD^2 = AY \cdot AC$. Dividing by 2 we get $AX \cdot AP = AY \cdot AQ$ which, by the converse of the power of a point theorem shows that points P, Q, X, Y are co-cyclic.



Let Z_1 and Z_2 be the projections of Z onto the sides AB and AC, respectively. As $\sphericalangle Z_1PZ = \sphericalangle Z_2QZ$ (we shall consider the case where these two angles are acute, the other cases being similar), triangles ZZ_1P and ZZ_2Q are similar, hence

$$\frac{Z_1P}{Z_2Q} = \frac{ZZ_1}{ZZ_2}, \qquad (1).$$

As $\sphericalangle Z_1XZ = \sphericalangle Z_2YZ$, triangles ZZ_1X and ZZ_2Y are also similar, hence

$$\frac{Z_1X}{Z_2Y} = \frac{ZZ_1}{ZZ_2}, \qquad (2).$$

From (1) and (2) we get $\dfrac{Z_1P}{Z_2Q} = \dfrac{Z_1X}{Z_2Y}$ and $\dfrac{Z_1P}{PX} = \dfrac{Z_2Q}{QY}$, which shows that points D, O, Z are collinear.

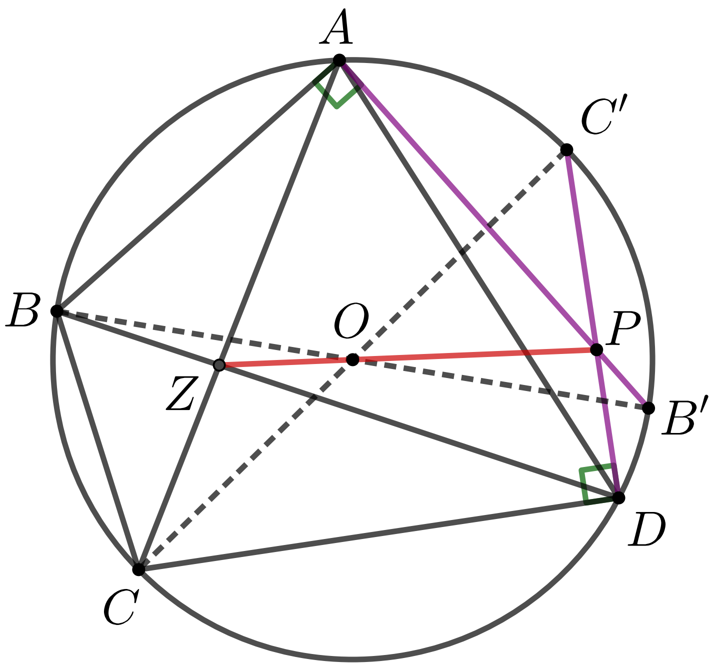
Indeed, considering the point $O' \in (DZ)$ such that $\dfrac{ZO'}{O'D} = \dfrac{Z_1P}{PX} = \dfrac{Z_2Q}{QY} = k$, we find that the projections of this point on the sides AB and AC are the points that divide the line segments $[Z_1X]$ and $[Z_2Y]$ into ratio k, i.e. precisely points P and Q, which makes O' the circumcenter of ABC, i.e. $O' = O$.

The following **generalization** also holds (see here):

Let ABC be a triangle in which D is the foot of the altitude from A. Consider $P \in (AB)$ and $Q \in (AC)$ such that $PQ \parallel BC$ and let X and Y be the projections of D onto AB and AC, respectively. The lines perpendicular at P and Q to AB and AC, respectively, meet at E. If $\{Z\} = QX \cap PY$, prove that D, E and Z are collinear.

For the proof, one can use the following lemma:

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, O its circumcenter, and Z the intersection point of its diagonals. If the lines perpendicular at A and C to AB and CD, respectively, meet at P, points O, P, Z are collinear.



For the proof, let B' and C' be the points diametrically opposed to B and C, respectively. As $BB' \cap CC' = \{O\}$ and $AB' \cap DC' = \{P\}$, from Pascal's hexagrammum mysticum theorem applied to the hexagram $BB'ACC'D$, the collinearity of the three points follows immediately.

Returning to the generalization, as above one proves that $AX \cdot AB = AY \cdot AC$. Multiplying by $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$ leads to $AP \cdot AX = AQ \cdot AY$, i.e. P, Q, X, Y are co-cyclic. Let O' be the circumcenter of triangle PQX. From the lemma it follows that O', E, Z are collinear. But O' is the intersection point of the perpendicular bisectors of line segments $[PX]$ and $[QY]$, i.e. the intersection of the midpoint lines of the trapezoids $EPXD$ and $EDYQ$. In other words, O' is the midpoint of $[DE]$, therefore points D, O', E, Z are collinear.