Problema săptămânii 292

100 de monede sunt așezate una lângă alta (într-un șir) pe masă. Avem voie să schimbăm locurile a două monede vecine, însă operația costă 1 leu. Pe de altă parte, putem schimba gratis locurile a două monede, dacă între ele sunt exact alte 3 monede. Cât ne costă să așezăm toate cele 100 de monede în ordine inversă?

Cu mulţumiri lui *Bogdan Enescu* care mi-a semnalat problema.

Soluţie: Vom arăta că inversarea monedelor costă 50 de lei.
Să colorăm locurile pe care stau monedele alternativ cu alb şi negru. Observăm că o mutare gratuite nu schimbă culoarea locului pe care se află monedele. Pe de altă parte, în configuraţia finală fiecare monedă trebuie să se afle pe un loc de culoare diferită de cea a locului pe care aceasta se afla iniţial. Astfel, fiecare monedă trebuie să fie implicată (cel puţin) într-o mutare schimbătoare de culoare. Sunt 100 de monede şi la o mutare putem muta două monede, deci este nevoie de cel puţin 50 de lei pentru a inversa ordinea monedelor.

În continuare demonstrăm că 50 de lei sunt suficienţi, adică putem inversa ordinea monedelor cu 50 de mutări pe bani şi altele gratuite.
Observăm că prin mutări gratuite putem permuta în orice ordine monede aflate pe locuri care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4.
Începem prin a ignora numerele 1 şi 100 şi a grupa numerele $2, 3, \ldots, 99$ în 49 de perechi formate din numere consecutive. Cu ajutorul a 49 de mutări ,,pe bani", schimbăm ordinea în fiecare pereche. Ajungem la:
$1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \ldots, 97, 96, 99, 98, 100$. Cu ajutorul unor mutări gratuite aducem numerele 1 şi 100 în poziţii vecine, de exemplu îl mutăm pe 1 pe poziţia 5 şi pe 100 pe poziţia 4. Facem rocada între ele cheltuind un al 50-lea leu. Acum fiecare număr este pe un loc congruent modulo 4 cu locul pe care trebuie să stea la final, astfel că prin operaţii gratuite fiecare monedă poate fi dusă la locul ei.

În concluzie, 50 de mutări sunt şi necesare, dar şi suficiente, deci numărul minim de mutări este 50.

Am primit soluţie corectă numai de la *Aida Mitroi*.

Problem of the week no. 292

100 coins are placed in a row on the table. We may swap two neighboring coins, but this operation costs 1\$. On the other hand, we may swap without any cost, two coins if between them there are exactly three other coins. How much does it cost to place the coins into the exact opposite order?

Many thanks to *Bogdan Enescu* for showing me the problem.

Solution: We prove that reversing the order of the coins costs 50 \$.
Let us color the places of the coins black and white, alternately. Notice that a free move is available only between coins situated on places of the same color. On the other hand, in the final configuration, each coin must be on a place of a different color than its initial one, which means that each coin must be involved in swap between neighbors (at least one). There are 100 coins; each move involves two coins, therefore it is clear that we need at least 50 such moves (at least 50 \$) to reverse the order of the coins.

Next, we prove that 50 \$ are sufficient, i.e. we can reverse the order of the coins with 50 swaps between neighboring coins and several free moves.
Clearly, by using only free moves, we can permute in any order the coins situated in places whose numbers give the same remainder when divided by 4.
We begin by ignoring numbers 1 and 100 and by grouping $2, 3, \ldots, 99$ into 49 pairs consisting of consecutive numbers. By 49 moves, we can swap the numbers in each pair. We arrive to the following situation:
$1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \ldots, 97, 96, 99, 98, 100$. With the aid of some free moves, we bring 1 and 100 into neighboring positions, say positions 5 and 4 respectively. By using a 50-th dollar, we swap 1 and 100.Now each number is on a position whose number gives the same remainder mod 4 as its position in the final configuration. Thus, we can freely rearrange the numbers in order to obtain the desired configuration.

In conclusion, 50 moves are both necessary and sufficient, so the minimum number of moves is 50.