Problema săptămânii 291

Numerele naturale nenule m şi n verifică relaţia $n(4n+1) = m(5m+1)$.
a) Arătaţi că $n-m$ este pătrat perfect.
b) Daţi exemplu de o pereche (m,n) de numere naturale nenule cu proprietatea de mai sus.

baraj seniori, Cipru, 2022

Primele trei soluţii sunt preluate de pe forumul mathematica.gr.

Soluţia 1:
a) Fie $a = n-m$. Evident, $a > 0$, în caz contrar, $n \le m$, am avea $4n^2+n \le 4m^2+m < 5m^2+m$.
Înlocuind n cu $a+m$ în ecuaţia din enunţ obţinem $m^2 - 8am - 4a^2 - a = 0$ (1).
Presupunând că a nu este pătrat perfect, el are un divizor prim p care în descompunerea în factori primi a lui a apare la o putere impară, $2k+1$, adică $v_p(a) = 2k+1$.
Din relaţia (1) rezultă că p^{2k+1} divide m^2, deci $p^{k+1} \mid m$. Tot din relaţia (1) rezultă că p^{2k+2} divide $a(4a+1)$ şi, cum $(p, 4a+1) = 1$, rezultă că $p^{2k+2} \mid a$, contradicţie cu alegerea lui k.
b) Înlocuind $a = b^2$ în relaţia (1) obţinem că m trebuie să verifice ecuaţia de gradul II $m^2 - 8b^2m - 4b^4 - b^2 = 0$. Pentru aceasta este necesar ca discriminantul $\Delta = 4b^2(20b^2+1)$ să fie pătrat perfect, adică $20b^2+1$ să fie pătrat perfect.
Alegem $b = 2$ ($b = 0$ conduce la $m = n = 0$) şi obţinem $a = 4$ şi $m = 34$, deci $(m,n) = (34, 38)$.

Soluţia 2: (*Alexandros Sygelakis*)
Înmulţită cu 16, relaţia din enunţ se poate scrie $(4m)^2 + (8m+1)^2 = (8n+1)^2$. Aşadar tripletul $(4m, 8m+1, 8n+1)$ este pitagoreic. În plus, $4m$ şi $8m+1$ sunt prime între ele, deci există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $4m = 2xy$, $8m+1 = x^2 - y^2$, $8n+1 = x^2+y^2$. (Se ştie că dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ verifică $a^2+b^2 = c^2$, atunci există $d, x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{a, b\} = \{d \cdot 2xy, d(x^2-y^2)\}$ şi $c = d(x^2+y^2)$.) Din $8m+1 = x^2-y^2$ rezultă că x este impar iar y par, astfel că $n - m = \dfrac{x^2+y^2-1}{8} - \dfrac{x^2-y^2-1}{8} = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$ este pătrat perfect.
b) Înlocuind $4m = 2xy$ în $8m+1 = x^2-y^2$ obţinem $4xy+1 = x^2-y^2$, adică $(x-2y)^2 - 5y^2 = 1$. Aşadar $u = x-2y$, $v = y$ trebuie să verifice ecuaţia Pell $u^2 - 5v^2 = 1$. O soluţie este $u = 9$, $v = 4$ ($u = 1$, $v = 0$ nu convine). Ea conduce la $x = 17$, $y = 4$ şi $m = 34$, $n = 38$.

Soluţia 3:
a) Putem scrie relaţia din enunţ $m^2 = 4n^2 + n - 4m^2 - m$, adică $m^2 = (n-m)(4n+4m+1)$. Arătăm că $(n-m, 4n+4m+1) = 1$. Presupunem contrariul. Atunci există un număr prim p care divide $n-m$ şi $4n+4m+1$, deci şi n^2, adică n. Atunci p divide şi $n-(n-m) = m$, deci şi $4n+4m$, deci şi $(4n+4m+1) - (4n+4m) = 1$, contradicţie. Aşadar, fiind relativ prime, $n-m$ şi $4n+4m+1$ trebuie să fie pătrate perfecte.

b) Dacă $m = uv$, putem alege $n-m = u^2$, $4n+4m+1 = v^2$. În acest caz $n = u^2+uv$, deci u şi v trebuie să satisfacă $4u^2 + 8uv + 1 = v^2$, adică $(2u + 2v)^2 - 5v^2 = -1$, deci se ajunge la o ecuaţie de tip Pell, $a^2 - 5b^2 = -1$ (cu a par, dar $a = 2$, $b = 1$ nu convine, ea conducând la $m = 0$). Următorul pătrat perfect de forma $5b^2 + 1$ se obţine pentru $b = 17$, anume $a = 38$. Aşadar, $v = 17$, $2u + 2v = 38$ implică $u = 2$, deci $(m, n) = (34, 38)$.

Soluţia 4: (*David Ghibu*)
a) Fie $a = n - m$. Evident, $a > 0$, în caz contrar, $n \leq m$, am avea $4n^2 + n \leq 4m^2 + m < 5m^2 + m$.
Înlocuind n cu $a+m$ în ecuaţia din enunţ obţinem ecuaţia de gradul II $m^2 - 8am - 4a^2 - a = 0 \qquad (1)$.
Pentru că m este o soluţie întreagă a acesteia, este necesar ca $\Delta = 4a(20a + 1)$ să fie pătrat perfect. Dar cum $(4a, 20a + 1) = 1$, asta înseamnă că $4a$ şi $20a + 1$ sunt pătrate perfecte, deci a este pătrat perfect.
b) Căutăm a pătrat perfect pentru care $20a + 1$ este pătrat perfect. Găsim imediat $a = 4$, care conduce la $m = 34$ şi $n = 38$.
Remarcă: (*David Ghibu*):
Deoarece ecuaţia Pell $u^2 - 20v^2 = 1$ are o infinitate de soluţii, ecuaţia din enunţ are şi ea o infinitate de soluţii.

Soluţia 5: (*Titu Zvonaru*)
a) Evident că m, n sunt diferite. Relația din enunț se poate scrie

$$(n - m)(4n + 4m + 1) = m^2 \qquad (1),\ (n - m)(5n + 5n + 1) = n^2 \qquad (2),$$

de unde rezultă că

$$(n - m)^2(4n + 4m + 1)(5n + 5m + 1) = (mn)^2 \qquad (3).$$

Deoarece $5(4n + 4m + 1) - 4(5n + 5m + 1) = 1$, deducem că numerele $4n + 4m + 1$ și $5n + 5m + 1$ sunt prime între ele. Din (3) obținem că $4n + 4m + 1$ și $5n + 5m + 1$ sunt pătrate perfecte, și atunci din (1) sau (2) rezultă că $n - m$ este pătrat perfect.
b) Relația din enunț se poate scrie sub forma $5(8n + 1)^2 - 4(10m + 1)^2 = 1$, adică o ecuație de tip Pell. Prin intermediul ecuației Pell $u^2 - 20v^2 = 1$ (care admite soluția de bază $(9, 2)$), obținem soluțiile ecuației $5x^2 - 4y^2 = 1$ (cu soluția de bază $(1, 1)$).

Exemple de perechi (m, n) cu proprietatea din enunț:

$$(34, 38),\ (10980, 12276),\ (3535558, 3952874).$$

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Claudia-Anamaria Drăgoi şi Marius-Valentin Drăgoi, Emanuel Mazăre, Denis Nica, Victor Dragoş, Ştefan Gobej* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 291

Positive integers m and n satisfy $n(4n+1) = m(5m+1)$.
a) Prove that $n - m$ is a perfect square.
b) Give example of a pair (m, n) of positive integers that satisfies the equation above.

TST Cyprus, 2022

Primele trei soluţii sunt preluate de pe forumul mathematica.gr.

Solution 1:
a) Put $a = n - m$. Clearly, $a > 0$, otherwise, $n \leq m$, would lead to $4n^2 + n \leq 4m^2 + m < 5m^2 + m$.
Replacing n by $a + m$ the given equation gives $m^2 - 8am - 4a^2 - a = 0 \qquad (1)$.
Assuming a is not a perfect square, a has a prime divisor p which occurs in the prime factorization of a at an odd exponent, $2k+1$, i.e. $v_p(a) = 2k+1$. From (1) it follows that p^{2k+1} divides m^2, i.e. $p^{k+1} \mid m$. Also from (1) we get that p^{2k+2} divides $a(4a+1)$ and, as $(p, 4a+1) = 1$, it follows that $p^{2k+2} \mid a$, contradicting the choice of k.
b) Substituting $a = b^2$ in relation (1) shows that m must be an integer solution of the quadratic equation $m^2 - 8b^2m - 4b^4 - b^2 = 0$. This only happens if $\Delta = 4b^2(20b^2+1)$ is a perfect square, i.e. $20b^2 + 1$ is a perfect square. Picking $b = 2$ ($b = 0$ leads to $m = n = 0$) leads to $a = 4$ and $m = 34$, i.e. $(m, n) = (34, 38)$.

Solution 2: (*Alexandros Sygelakis*)
Multiplied by 16, the given equation can be written $(4m)^2 + (8m+1)^2 = (8n+1)^2$. Thus, the triple $(4m, 8m+1, 8n+1)$ is pythagorean. Moreover, $4m$ and $8m+1$ are co-prime, therefore there exist $x, y \in \mathbb{N}$ such that $4m = 2xy$, $8m + 1 = x^2 - y^2$, $8n + 1 = x^2 + y^2$. (It is known that if $a, b, c \in \mathbb{N}$ satisfy $a^2 + b^2 = c^2$, then there exist $d, x, y \in \mathbb{N}$ such that $\{a, b\} = \{d \cdot 2xy, d(x^2 - y^2)\}$ and $c = d(x^2 + y^2)$.) From $8m + 1 = x^2 - y^2$ it follows that x is odd while y is even, meaning that $n - m = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{8} - \dfrac{x^2 - y^2 - 1}{8} = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$ is a perfect square.
b) Substituting $4m = 2xy$ into $8m + 1 = x^2 - y^2$ leads to $4xy + 1 = x^2 - y^2$, i.e. $(x - 2y)^2 - 5y^2 = 1$. Thus, $u = x - 2y$, $v = y$ must satisfy the (Pell) equation $u^2 - 5v^2 = 1$. One solution is $u = 9$, $v = 4$ ($u = 1$, $v = 0$ does not lead to positive solution). We obtain $x = 17$, $y = 4$ and $m = 34$, $n = 38$.

Solution 3:
a) Write the given equation as $m^2 = 4n^2 + n - 4m^2 - m$, i.e. $m^2 = (n-m)(4n+4m+1)$. We prove that $(n-m, 4n+4m+1) = 1$. Assume the contrary to be true. In this case, there is a prime p that divides both $n-m$ and $4n+4m+1$, hence also n^2, i.e. n. Then p also divides $n-(n-m) = m$, hence also $4n+4m$ and $(4n+4m+1)-(4n+4m) = 1$, contradiction. Thus, being co-prime, both $n - m$ and $4n + 4m + 1$ must be perfect squares.
b) If $m = uv$, we can pick $n - m = u^2$, $4n + 4m + 1 = v^2$. In this case, $n = u^2 + uv$, therefore u and v must satisfy $4u^2 + 8uv + 1 = v^2$, i.e. $(2u + 2v)^2 - 5v^2 = -1$, which

leads to a Pell type equation, $a^2 - 5b^2 = -1$ (with a even, but $a = 2$, $b = 1$ does not work because it leads to $m = 0$). The following perfect square of the form $5b^2 + 1$ is obtained for $b = 17$, namely $a = 38$. Thus, $v = 17$, $2u + 2v = 38$ leads to $u = 2$, i.e. $(m, n) = (34, 38)$.

Solution 4: (*David Ghibu*)
a) Put $a = n - m$. Clearly, $a > 0$, otherwise, $n \leq m$, we would have $4n^2 + n \leq 4m^2 + m < 5m^2 + m$.
Replacing n by $a + m$ in the given equation shows that m must be an integer solution of the quadratic equation $m^2 - 8am - 4a^2 - a = 0 \qquad (1)$. It follows that $\Delta = 4a(20a + 1)$ is a perfect square. But $(4a, 20a + 1) = 1$, therefore both $4a$ and $20a + 1$ are perfect squares, hence a is a perfect square.
b) We seek a, perfect square, such that $20a + 1$ is also a perfect square. We find $a = 4$,which leads to $m = 34$ and $n = 38$.
Remark: (*David Ghibu*):
Because the Pell equation $u^2 - 20v^2 = 1$ has infinitely many solutions, the given equation also has infinitely many solutions.