Problema 1.
Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$2^x - 5^y = 39.$$

* * *

Soluţie:
Dacă $y = 0$ nu avem soluții. Pentru $y \geq 1$, ultima cifră a umărului $5^y + 39$ este 4, deci $x = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Dacă y este impar, atunci $5^y = M_3 + 2$ și $2^{4k+2} = M_3 + 1$, imposibil.

Deci $y = 2l, l \in \mathbb{N}$ și ecuația devine $(2^{2k+1} - 5^l)(2^{2k+1} + 5^l) = 39$, de unde rezultă $x = 6, y = 2$.

Problema 2.

Patrulaterul convex $ABCD$ are lungimile laturilor $AB = 1, BC = 4, CD = 7, DA = 8$. Ştiind că aria patrulaterului este maximă, calculaţi lungimile diagonalelor sale.

Soluţie: Dacă notăm cu S aria patrulaterului, avem:

$$S = S_{ABD} + S_{CBD} \le \frac{AB \cdot AD}{2} + \frac{CB \cdot CD}{2} = 18,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. Cum $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$, patrulaterul de arie 18 poate fi obţinut din două triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza $BD = \sqrt{65}$. În această situaţie patrulaterul este inscriptibil şi, folosind teorema lui Ptolemeu, obţinem $AC = \dfrac{3\sqrt{65}}{5}$.

Problema 3.

Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Aflaţi numărul submulţimilor M cu trei elemente ale mulţimii A care au proprietatea că suma sau modulul diferenţei oricăror două elemente distincte ale lui M este element al mulţimii M.

Aurel Bârsan

Soluție.

Fie $M = \{a, b, c\} \subseteq A$ o astfel de submulţime cu $a < b < c$. Avem: $a, b \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow c + a, c + b > c \Longrightarrow c + a, c + b \notin M$.
Conform ipotezei, rezultă că $c - a, c - b \in M$, $c - b < c - a < c$ şi $c = a + b$, astfel că $M = \{a, b, a + b\}$, cu $a, b \in A$, $a + b \leq n$.

Dacă n este par, avem:
$a = 1$, $b \in \{2, 3, ..., n - 1\}$;
$a = 2$, $b \in \{3, 4, ..., n - 2\}$;
$\vdots$
$a = \frac{n}{2} - 1$, $b \in \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1\}$.

Pentru n par, există, deci, $(n - 2) + (n - 4) + ... + 2 = \frac{n(n-2)}{4}$ submulţimi.

Dacă n este impar, avem:
$a = 1$, $b \in \{2, 3, ..., n - 1\}$;
$a = 2$, $b \in \{3, 4, ..., n - 2\}$;
$\vdots$
$a = \frac{n-1}{2} - 1$, $b \in \{\frac{n+1}{2}\}$.

Pentru n impar, există, deci, $(n-2)+(n-4)+...+1 = \frac{(n-1)^2}{4}$ submulţimi.

Problema 4.

Aflați numerele naturale x și y pentru care numărul $\sqrt{x^2+y+1}+\sqrt{y^2+x+4}$ este natural.

Marcel Chiriță

Soluţie:

Trebuie să avem $\sqrt{x^2+y+1} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y^2+x+4} \in \mathbb{N}$. Cum $x, y \geq 0$, avem $x^2+y+1 \geq (x+1)^2$ și $y^2+x+4 \geq (y+1)^2$, de unde $y \geq 2x$ și $x+3 \geq 2y$. Adunând ultimele două inegalități obținem $x+y \leq 3$. Prin verificare directă obținem soluțiile $x=y=0$ și $x=1, y=2$.