Problema 1

Determinați numerele naturale nenule a și b, $a < b$, cu proprietatea:

oricare ar fi numerele reale $x, y \in [a, b]$ rezultă $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b]$.

Soluție:

Pentru $x = y = a$ obținem $a \leq \frac{2}{a} \leq b$, deci $a = 1$ și $b \geq 2$.

Pentru $x = y = b$ obținem $1 \leq \frac{2}{b} \leq b$, deci $b \leq 2$.

Prin urmare, $a = 1$ și $b = 2$.

Se verifică ușor că $a = 1, b = 2$ satisfac proprietatea din enunț.

Problema 2.
Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y) astfel încât

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

***

Soluţie:
În primul rând observăm că perechile de forma $(k, -k), k \in \mathbb{Z}$ sunt soluţii pentru ecuaţia dată.

Dacă $x + y \neq 0$, ecuaţia devine:

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

care este echivalentă cu:

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Rezultă că $(x - 1)^2 \leqslant 1$ şi $(y - 1)^2 \leqslant 1$, inegalităţi care restrâng intervalul în care se află necunoscutele x, y la $[0, 2]$. Obţinem astfel soluţiile $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$.

În final, soluțiile sunt: $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ și $(k, -k), k \in \mathbb{Z}$.

Problema 3.

Fie *A, B, C, D* puncte necoplanare. Se notează cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor *BDC*, respectiv *ADC*. Arătați că punctele *A, B,* H_1, H_2 sunt coplanare dacă și numai dacă sunt conciclice.

A. M. Ionescu

Soluție:

Dacă punctele sunt conciclice atunci ele sunt coplanare.

Reciproc, dacă punctele sunt coplanare și $BH_1 \cap CD = \{T\}$, atunci $\{T\} = (ABH_1) \cap CD,$ deci $AH_2 \cap CD = \{T\}$.

Triunghiurile H_1TC și DTB sunt asemenea, fiind dreptunghice și $\measuredangle H_1CT = \measuredangle TBD = 90^\circ - \measuredangle D$.

Prin urmare, $\frac{H_1T}{DT} = \frac{TC}{TB}$, deci $TH_1 \cdot TB = TC \cdot TD$.

Analog se demonstrează că $TH_2 \cdot TA = TC \cdot TD$, prin urmare $TH_1 \cdot TB = TH_2 \cdot TA$. Din reciproca puterii punctului față de cerc rezultă conciclicitatea punctelor *A, B,* H_1, H_2.

Problema 4.

Fie a, b numere naturale astfel încât $b > a \geq 2$. Știind că $a + k$ e prim cu $b + k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, b - a\}$, arătați că a și b sunt consecutive.

Aurel Bârsan

Soluţie:

Fie $n = b - a$. Avem $(a+k, b+k) = (a+k, b+k-a-k) = (a+k, n) = 1$, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Secvența $a+1, a+2, \ldots, a+n$ are n numere consecutive, rezultă că unul dintre ele se divide cu n. Atunci $n = 1$, altfel n nu ar fi prim cu acesta, deci a și b sunt consecutive și satisfac cerința.