SOLUȚIE

Problema 1. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) pentru care

$$| x - y | + | 5x - 2009 | \leq 1.$$

Emil Vlad, Zimnicea, Teleorman

Soluţie. Dacă x şi y sunt numere întregi, atunci $x - y$ şi $5x - 2009$ sunt numere întregi. Relaţia din enunţ conduce la următoarele cazuri posibile: (1) $|x - y| = 0$ şi $|5x - 2009| = 0$; (2) $|x - y| = 1$ şi $|5x - 2009| = 0$ şi (3) $|x - y| = 0$ şi $|5x - 2009| = 1$. Cazurile (1) şi (2) nu sunt posibile deoarece din $|5x - 2009| = 0$ obţinem $x = \frac{2009}{5}$ care nu este număr întreg. Din cazul (3) rezultă $x = y = 402$.

SOLUȚIE

Problema 2. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale demonstraţi că $max(a+c, b+d) \leq max(a,b) + max(c,d)$.

Ioan Tebieş şi Vasile Rusu, Năsăud

Soluţie. Ne vom folosi de relaţia $max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ şi de proprietatea modulului $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Avem

$$max(a+c, b+d) = \frac{a+c+b+d+|a+c-b-d|}{2} \leq$$

$$\leq \frac{(a+b)+(c+d)+|a-b|+|c-d|}{2} = \frac{a+b+|a-b|}{2} + \frac{c+d+|c-d|}{2} =$$

$$max(a,b) + max(c,d)$$

SOLUȚIE

Problema 3. Arătaţi că nu există numere reale x, astfel încât

$$| x - \sqrt{3} | + | x - \frac{3}{2} | = x - 2.$$

Vasile Predan, Curtea de Argeş

Soluţie. În membrul stâng avem o sumă de module şi atunci trebuie ca $x - 2 \geq 0$, adică $x \geq 2$. Pentru $x \geq 2$ avem $x - \sqrt{3} > 0$ şi $x - \frac{3}{2} > 0$, de unde rezultă $|x - \sqrt{3}| = x - \sqrt{3}$ şi $|x - \frac{3}{2}| = x - \frac{3}{2}$. Cu acestea ecuaţia devine $x - \sqrt{3} + x - \frac{3}{2} = x - 2$, de unde $x = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Dar $\sqrt{3} - \frac{1}{2} < 2$. Aşadar, ecuaţia nu are soluţii.

SOLUȚIE

Problema 4. Se consideră ecuaţia:

$$|x+2009|+|x+2008|+...+|x+1|+|x|+|x-1|+...+|x-2008|+|x-2009| = a,$$

unde a este număr natural.

Arătaţi că dacă ecuaţia are soluţie unică, atunci $a - 2009$ este pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Se ştie că pentru orice x real $|-x| = |x|$. De aici deducem că $|-x+m| = |x-m|$ şi $|-x-m| = |x+m|$. Având în vedere cele de mai sus tragem concluzia că dacă x_0 este soluţie a ecuaţiei, atunci şi $-x_0$ este soluţie a ecuaţiei. Acum, dacă soluţia e unică trebuie să avem $x_0 = -x_0$ de unde $x_0 = 0$. Dacă soluţia este 0 atunci $a = |2009| + |2008| + ... + |1| + |0| + |-1| + ... + |-2008| + |-2009| = 2(1 + 2 + ... + 2008 + 2009) = 2009 \cdot 2010$. De aici rezultă $a - 2009 = 2009 \cdot 2010 - 2009 = 2009(2010 - 1) = 2009^2$, deci $a - 2009$ este pătrat perfect.