SOLUȚIE

1. Găsiţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că 10^n divide $2022!$, unde cu $k!$ am notat produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

Soluţie. Observăm că numărul căutat este cel mai mare număr natural n cu proprietatea că 5^n divide $2022!$ (exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a numărului $2022!$), adică

$$\left[\frac{2022}{5}\right]+\left[\frac{2022}{5^2}\right]+\left[\frac{2022}{5^3}\right]+\left[\frac{2022}{5^4}\right]+\left[\frac{2022}{5^5}\right]+\ldots$$

Cum pentru $k \geqslant 5$ avem $\left[\dfrac{2022}{5^k}\right]=0$, rezultă că

$$n_{max}=\left[\frac{2022}{5}\right]+\left[\frac{2022}{5^2}\right]+\left[\frac{2022}{5^3}\right]+\left[\frac{2022}{5^4}\right]=404+80+16+3=503.$$

SOLUŢIE

2. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{2021}{2022} \geqslant \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{7^2} + \ldots + \frac{4}{4043^2}.$$

Soluţie. Folosind inegalitatea între media aritmetică şi media geometrică a numerelor naturale 1 şi 2 obţinem $\frac{1+2}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot 2}$, de unde, ridicând la pătrat şi inversând, avem

$$\frac{4}{3^2} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}.$$

În mod similar obţinem inegalităţile

$$\frac{4}{5^2} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{4}{7^2} \leqslant \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$\ldots$$

$$\frac{4}{4043^2} \leqslant \frac{1}{2021 \cdot 2022} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}.$$

Prin sumare acestea conduc la inegalitatea cerută.

SOLUŢIE

3. Pe laturile AB şi CD ale unui dreptunghi $ABCD$ cu $AB > BC$ se iau respectiv punctele M şi N astfel încât $\sphericalangle BCM = 30^\circ$, iar N este simetricul punctului M faţă de punctul O de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Demonstraţi că triunghiul CNM este echilateral dacă şi numai dacă dreapta OB este perpendiculară pe dreapta CM.

Soluţie. Considerăm pentru început triunghiul CNM echilateral. Cum CO este mediană în triunghiul CNM echilateral, deducem că este şi bisectoare, deci $\sphericalangle MOC = 30^\circ = \sphericalangle BCM$. Astfel triunghiul BCO, având $\sphericalangle BCO = 60^\circ$ şi $OB = OC$, este echilateral, iar CM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCO$, aşadar perpendiculară pe dreapta OB.

Reciproc, considerând că dreapta OB este perpendiculară pe dreapta CM, oservăm că $\sphericalangle CBO = 60^\circ$ şi $OB = OC$, deci triunghiul BCO este echilateral. Deducem astfel că dreapta CM este mediatoarea segmentului OB şi astfel $MB = MO$, deci $2 \cdot MB = 2 \cdot MO$. Folosind teorema unghiului de 30° în triunghiul CMB dreptunghic în B deducem că $CM = 2 \cdot MB$, prin urmare $CM = MN$ şi, cum $\sphericalangle MCN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, obţinem că triunghiul CNM este echilateral.

SOLUȚIE

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle C = 90^\circ$ în care $\sphericalangle B > 30^\circ$. Pe laturile AB şi AC se consideră punctele D şi respectiv E astfel încât $AD < AE$. Dacă F este simetricul punctului D faţă de BC, arătaţi că $AF > BE$.

Soluţie. Considerăm punctul P pe AE, între A şi E, astfel încât $AP = AD$, iar punctul M simetricul lui A faţă de dreapta BC.

Cum $\sphericalangle ABC > 30^\circ$ rezultă că $\sphericalangle BAC < 60^\circ$. Fie punctul N pe dreapta BC de aceeaşi parte a lui C ca şi punctul B astfel încât $\sphericalangle NAC = 60^\circ$. Deducem că B este situat între C şi N şi $AN > AB$.

Deoarece BC este mediatoarea segmentelor AM, respectiv DF, $AM \neq DF$, obţinem că patrulaterul $AMFD$ este trapez isoscel, deci $AF = MD$.

Considerăm punctul Q pe dreapta AC de aceeaşi parte a lui A ca şi C astfel încât $AQ = AB$. Atunci $MD > QD$. Cum triunghiurile ABP şi AQD sunt congruente (L.U.L.) rezultă că $BP = QD$, deci $AF = MD > QD = BP$ şi, cum $BP > BE$, obţinem că $AF > BE$.