



ViitoriOlimpici.ro

Problema 1, Clasa a VII-a
Etapa 5, Ediția a XIII-a

Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro

1. Numerele naturale a, b au proprietatea că $\sqrt{a} + \frac{10}{\sqrt{b}}$ este un număr întreg. Determinați valorile lui b .

2. Fie a și b două numere întregi astfel încât $4a^2 - 3b^2 + 1 = 7b - 9a$.
Arătați că numerele $3a + 3b + 7$ și $4a + 4b + 9$ sunt pătrate perfecte.

3. Fie un pătrat $ABCD$ de latură l , punctul M pe latura AB astfel încât $\sphericalangle BCM = 15^\circ$, iar punctul N pe latura AD astfel încât $\sphericalangle DCN = 30^\circ$. Punctul O este vârful triunghiului echilateral AOM , situat în interiorul pătratului $ABCD$.

- Demonstrați că punctele D , O și B sunt coliniare.
- Demonstrați că dreapta MN este tangentă cercului de centru C și rază l .

4. Considerăm triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), punctul D piciorul perpendicularei din A pe BC și punctele M, N pe segmentul AD astfel încât $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NBD$. Știind că triunghiul ABN este isoscel, demonstrați că are loc relația:

$$MN = \frac{AB}{AD} \cdot (AB - AD).$$