Problema săptămânii 289

Fie ABC un triunghi, H ortocentrul acestuia, iar M mijlocul segmentului $[BC]$. Fie d o dreaptă arbitrară care trece prin punctul M şi care intersectează cercul de diametru $[AH]$ în P şi Q.
Demonstraţi că ortocentrul triunghiului APQ se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

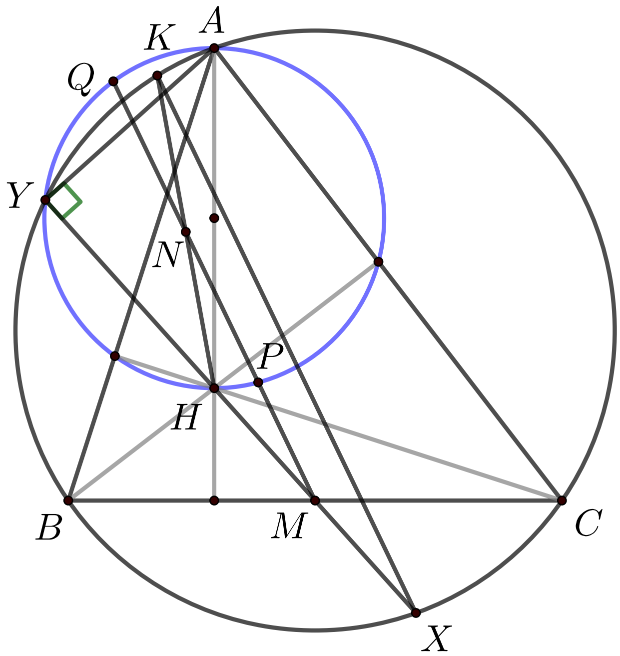
antrenament Franţa, 2019

Soluţia 1: (bazată pe soluţia oficială)
Vom folosi următoarea lemă clasică:
Lemă. Simetricul ortocentrului triunghiului ABC faţă de mijlocul laturii $[BC]$ este punctul diametral opus vârfului A în cercul circumscris triunghiului.

Fie X simetricul lui H faţă de M, iar K simetricul lui H faţă de mijlocul, N, al lui $[PQ]$. Conform lemei, X este punctul diametral opus lui A în cercul circumscris. Pentru triunghiul APQ, H este tocmai punctul diametral opus lui A în cercul circumscris, deci, conform aceleiaşi leme, simetricul lui H faţă de mijlocul lui $[PQ]$ este tocmai ortocentrul triunghiului APQ.

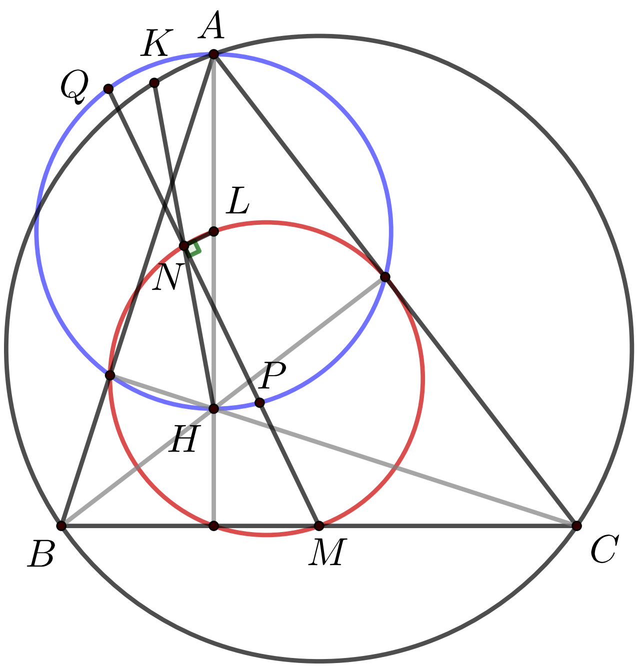
Fie Y al doilea punct de intersecţie a dreptei MX cu cercul de diametru $[AH]$. Atunci $m(\sphericalangle AYX) = m(\sphericalangle AYH) = 90°$, dar cum $[AX]$ este diametru în cercul circumscris triunghiului ABC, Y se află şi pe cercul circumscris.

Pentru a arăta că punctul K se află pe cercul circumscris este suficient să arătăm că $m(\sphericalangle AKX) = 90°$. Dar $AK \perp PQ$, iar $PQ \parallel XK$ (deoarece $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul KHX). Deducem că $AK \perp KX$, de unde concluzia.



Soluţia 2:
Fie N, respectiv L, mijloacele segmentelor $[PQ]$, respectiv $[AH]$. Ca mai sus, din lemă rezultă că ortocentrul, K, al triunghiului APQ este simetricul lui H faţă de N. Dar $LN \perp PQ$ (fiindcă L este centrul cercului circumscris lui APQ), deci N se află pe cercul de diametru $[LM]$ care este tocmai cercul lui Euler al triunghiului ABC.

Omotetia (directă) de centru H şi raport 2 duce cercul lui Euler în cercul circumscris triunghiului ABC. Ea duce punctul L, situat pe cercul lui Euler, în punctul K care este situat pe cercul circumscris.



Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Victor Vasile Dragoş, Andrei Pană* şi *Emanuel Mazăre*.

Problem of the week no. 289

Let ABC be a triangle, H its orthocenter, and M the midpoint of the side $[BC]$. Let d be an arbitrary line through M, which intersects the circle of diameter $[AH]$ at P and Q.
Prove that the orthocenter of triangle APQ lies on the circumcircle of triangle ABC.

French training, 2019

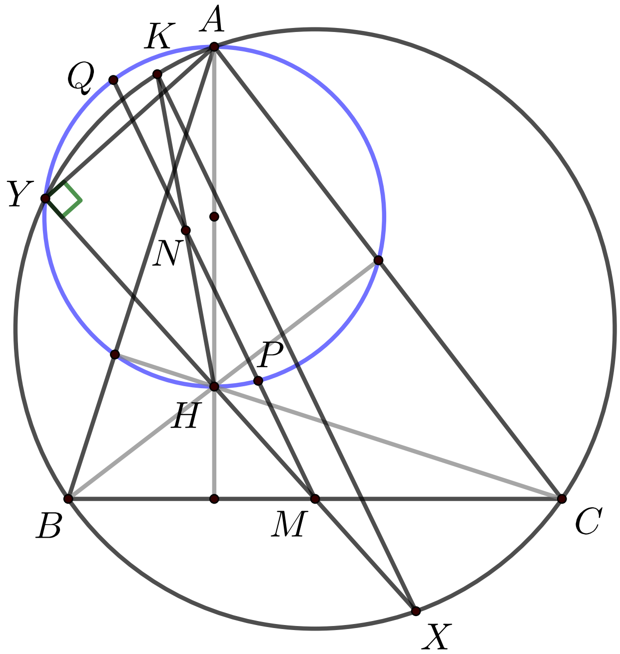
Solution 1: (based on the official solution)
We use the following classical lemma:
Lemma. The reflection of the orthocenter of triangle ABC with respect to the midpoint of the side $[BC]$ is the point that is diametrically opposite to the vertex A in

the circumcircle of the triangle.

Let X be the reflection of H with respect to M, and let K be the reflection of H with respect to the midpoint, N, of $[PQ]$. According to the Lemma, X is diametrically opposite to A in the circumcircle. For triangle APQ, H is precisely the point diametrically opposite to A in the circumcircle, therefore, according to the same Lemma, the reflection of H with respect to the midpoint of $[PQ]$ is the orthocenter of triangle APQ.

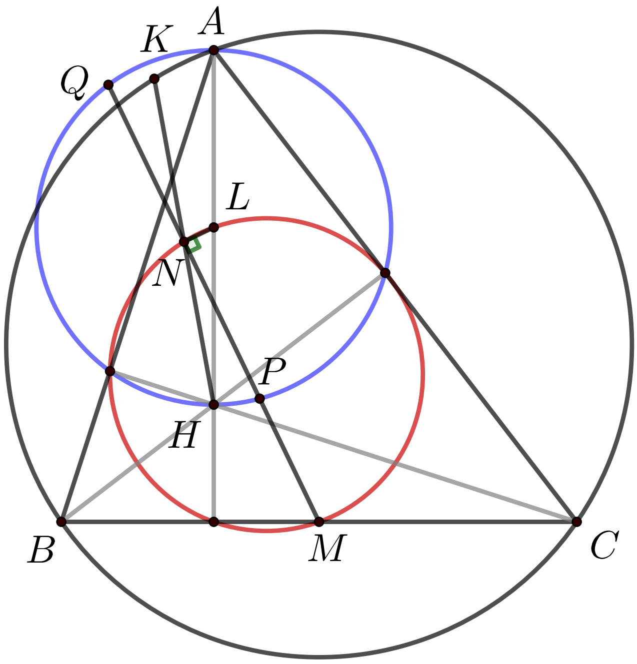
Consider Y the second intersection point of MX with the circle of diameter $[AH]$. We have $\sphericalangle AYX = \sphericalangle AYH = 90°$, but, as $[AX]$ is a diameter in the circumcircle of ABC, Y also lies on the circumcircle.

In order to prove that K is on the circumcircle, it is sufficient to prove that $\sphericalangle AKX = 90°$. But $AK \perp PQ$ (altitude), and $PQ \parallel XK$ (because $[MN]$ is a mid-line in triangle KHX). It follows that $AK \perp KX$, and thus the conclusion.



Solution 2:
Let N, L be the midpoints of line segments $[PQ]$ and $[AH]$, respectively. As above, from the Lemma we obtain that the orthocenter, K, of triangle APQ is the reflection of H with respect to N. But $LN \perp PQ$ (because L is the circumcenter of APQ), therefore N is on the circle of diameter $[LM]$ which is exactly the 9 point circle of triangle ABC.

The (direct) homothety of center H and ratio 2 maps the 9 point circle into the circumcircle. It maps point L, situated on the 9 point circle into point K which is on the circumcircle.


A
K
Q
L
N
P
H
B
M
C