Problema săptămânii 288

Dintr-un campionat la care participă 30 de echipe său desfăşurat până acum 14 etape. În fiecare etapă, fiecare echipă a disputat exact un meci, şi anume împotriva unei echipe contra căreia nu mai jucase în etapele anterioare.
Demonstraţi că există trei echipe cu proprietatea că nicicare două nu au jucat una contra celeilalte.

Concursul Arany Dániel, 2020

Soluţia oficială 1:
Să ne uităm la două echipe, A şi B, care încă nu au jucat una contra celeilalte.
a) Dacă printre echipele cu care au jucat A, respectiv B, există măcar o echipă comună, atunci A şi B luate împreună au jucat împotriva a cel mult 27 de echipe, deci există cel puţin una cu care niciuna dintre ele nu a jucat. Atunci A, B şi această echipă formează un triplet care satisface cerinţa.
b) Dacă nu există nicio echipă care să fi jucat şi cu A şi cu B, atunci A a jucat cu 14 dintre echipele rămase, iar B cu celelate 14. Fie C şi D două echipe cu care A a jucat deja. Dacă C şi D nu au jucat una contra celeilalte, atunci între echipele B, C şi D nu s-a disputat niciun meci.
c) Rămâne cazul în care toate echipele care au jucat deja cu A au jucat între ele. Astfel, în fiecare dintre primele 14 etape, grupul de 15 echipe format din A şi echipele care au jucat cu A, au jucat între ele. Dar acest lucru nu este posibil deoarece ar însemna că în fiecare etapă aceste echipe au jucat numai între ele, dar cum avem un număr impar de echipe în grup, 15, în nicio etapă echipele din grup nu puteau juca numai între ele.

Soluţia oficială 2:
Să alegem o echipă, A şi să notăm cu A_1, A_2, ..., A_{14} echipele cu care A a jucat în primele 14 etape. Ne uităm la acest grup de 15 echipe şi la grupul format din celelalte 15 echipe, B_1, B_2, ..., B_{15}. Distingem două cazuri.
1. A existat meci între două echipe din grupe diferite.
A nu a participat la vreun astfel de meci, deci putem presupune că A_1 a jucat cu B_1. Cum echipa B_1 a jucat 14 meciuri, ea nu a putut să joace împotriva tuturor echipelor B_j, deci există cel puţin una cu care nu a jucat. Să presupunem că B_1 nu a jucat cu B_2. Atunci între echipele A, B_1 şi B_2 nu s-a disputat niciun meci.
2. Toate meciurile s-au disputat între echipe din aceeaşi grupă.
Asta înseamnă că în fiecare etapă echipele dintr-o grupă au jucat numai între ele, dar acest lucru nu este posibil deoarece nu putem grupa 15 echipe în perechi.
Aşadar, numai primul caz este posibil, ori în acela am găsit trei echipe care respectă cerinţa.

Soluţia 3: (*David Ghibu*)
Traducem problema în limbaj de grafuri. Considerăm un graf cu 30 de vârfuri reprezentând cele 30 de echipe. Unim două vârfuri cu o muchie dacă respectivele echipe **nu** au jucat încă una împotriva celeilalte. Fiecare echipă mai are de jucat

cu 15 dintre echipele rămase, deci gradul fiecărui vârf este 15. Teorema lui Mantel (caz particular al teoremei lui Turán) spune că numărul maxim de muchii pe care îl poate avea un graf cu $n = 30$ de vârfuri pentru ca să nu se formeze triunghi este $\left[\dfrac{n^2}{4}\right] = \dfrac{900}{4} = 225$. Graful nostru are exact $\dfrac{30 \cdot 15}{2} = 225$ de muchii, deci nu obţinem deocamdată contradicţie. Însă tot teorema lui Mantel ne spune că avem egalitate dacă şi numai dacă graful este unul bipartit complet, format din două grupe de cardinal egal, adică atunci când avem două grupe de câte 15 echipe care nu sunt unite decât cu echipele din celălalt grup. Asta înseamnă două grupe de câte 15 echipe care au jucat mereu numai între ele, ceea ce nu este posibil deoarece nu putem grupa 15 echipe în perechi.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Emanuel Mazăre, Victor Vasile Dragoş* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 288

There are 30 teams participating at a tournament; 14 stages have been played so far. In every stage, each teams plays exactly one game, against a team against which they didn't play in the preceding stages. Prove that there exists a group of three teams between which there were no encounters in the stages played so far.

Arany Dániel Contest, 2020

Official solution 1:
Consider two teams, A and B, that have not played against each other.
a) If among the teams that have played against team A and against team B, there is at least one common team, then teams A and B taken together have played against at most 27 teams, which leaves at least one team that has not played against neither A nor B. In this case, this team, together with teams A and B, forms a triple of teams that have not yet played each other.
b) If there is no team having played against both A and B, then A has played with 14 of the remaining teams, while B has played against the other 14 teams. Let C and D two teams that have played against A. If C and D have not played each other, there were no games between teams B, C, D.
c) The only remaining case is the one in which all the teams that have played against A have also played against each other. Thus, in the first 14 stages, the group consisting of A and the 14 teams that have played against A, has only played internally, i.e. only with teams within the group. But as there is an odd number of teams in the group, this scenario could not have happened.

Official solution 2:
Pick a team, say A, and denote by A_1, A_2, …, A_{14} the teams that A has played in the first 14 stages. Examine the group consisting of these 15 teams, and the group consisting of the remaining 15 teams, B_1, B_2, …, B_{15}. We distinguish two cases.

1. There was a game between teams belonging to different groups.
A was not involved in such games, so we may assume that A_1 has played against B_1. As B_1 has played so far 14 games, it could not have played against all the teams B_j, therefore there is at least one against which B_1 has not yet played. Assume B_1 has not played against B_2. In that case, there were no games between teams A, B_1 and B_2.
2. All the matches were between teams belonging to the same group.
This means that, in each stage, the teams of one group only played between themselves, which is not possible as there is an odd number of teams in a group, so the teams from one group can not be put into pairs.
Thus, the only possible case is the first one, and in that case we have proven the existence of three teams with no games between them.

Soluţion 3: (*David Ghibu*)
We translate the problem into terms of graph theory. Consider a graph with 30 vertices representing the 30 teams. We join two vertices by an edge if the two teams **have not** played against each other. Each team still has 15 games to play, so the degree of each vertex is 15. Mantel's Theorem (a particular case of Turán's Theorem) states that the maximum number of edges a graph with $n = 30$ vertices may have such that there is no triangle formed, is $\left[\frac{n^2}{4}\right] = \frac{900}{4} = 225$. Our graph has exactly $\frac{30 \cdot 15}{2} = 225$ edges, so Mantel's Theorem does not lead directly to contradiction. But the same theorem also states that equality only occurs in the case of a complete bipartite graph, i.e. one in which the vertices are split into two equal sets (in our case 15), all vertices of one set are joined by edges to all the vertices of the other set, and there are no edges joining vertices of the same set. But this case is not possible in our problem as this would mean two sets of 15 teams that have always played only between them (but 15 is odd, so we can not organize any stage in which 15 teams only play between themselves).