Problema săptămânii 287

Fie $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ şi $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul care este relativ prim cu exact 5 dintre elementele mulţimii A şi cu exact 5 dintre elementele mulţimii B.

Concursul Arany Dániel, 2020

Soluţie: Fie n numărul căutat. Evident, n este impar, altminteri el nu ar fi relativ prim cu niciunul din elementele lui B. Astfel, n este relativ prim cu fiecare din numerele 2, 4, 8 şi 16. Dacă n nu ar fi divizibil cu 3, atunci n ar fi relativ prim şi cu 6, 12 şi 18, deci deja cu 7 dintre elementele lui B. Aşadar, obligatoriu $3 \mid n$. Analog avem şi $5 \mid n$, altfel n ar fi relativ prim cu 2, 4, 8, 10, 16, 20, adică deja cu 6 dintre elementele mulţimii B.
Pe de altă parte, n trebuie să nu fie divizibil cu 7 (altminteri n ar fi relativ prim cu numai 4 dintre elementele lui B, anume cu cele 4 puteri ale lui 2). Aşadar, pentru ca n să fie relativ prim cu exact 5 dintre elementele lui B, este necesar şi suficient ca $15 \mid n$ şi $(n, 14) = 1$.
Ne uităm acum la mulţimea A.
Fiind divizibil cu 3 şi 5, dintre elemente lui A, n poate fi relativ prim cu 1, 7, 11, 13, 17 şi 19, dar condiţia din enunţ arată că n nu are voie să fie relativ prim cu toate aceste 6 numere, ci numai cu 5 dintre ele. Cum n nu e divizibil cu 7, n trebuie să fie divizibil cu 11, 17 sau 19; dar îl vrem pe n cât mai mic, deci îl alegem divizibil cu 11. Aşadar, cel mai mic n cu proprietatea din enunţ este $n = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Andrei Pană, Emanuel Mazăre* şi *Denis Nica.*

Problem of the week no. 287

Consider $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ and $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Determine the smallest positive integer that is co-prime with exactly 5 of the elements of set A and with exactly 5 of the elements of set B.

Arany Dániel Contest, 2020

Solution: Let n be the saught number. Clearly, n is odd, else it wouldn't be co-prime with any of the elements of B. Thus, n is co-prime with each of the numbers 2, 4, 8 and 16. If n is not a multiple of 3, then n would be co-prime also with 6, 12 and 18, which makes it co-prime with 7 elements of B already. We conclude that $3 \mid n$. Similarly $5 \mid n$, or else n would be co-prime with 2, 4, 8, 10, 16, 20, i.e. with 6 of the elements of B.
On the other hand, n can not be a multiple of 7 (otherwise it would be co-prime with only 4 of the elements of B, namely the 4 power of 2). We conclude that, in order to be co-prime with exactly 5 of the elements of B, n must be a multiple of 15, co-prime with 14. This is also sufficient.

Now we look at the set A.
Being a multiple of both 3 and 5, of the elements of A, n can be co-prime with 1, 7, 11, 13, 17 and 19, but it may not be co-prime with all these numbers, therefore it must be divisible by exactly one of the numbers 11, 13, 17 or 19. Since we want n to be minimal, we take n to be divisible by 11. Thus, the smallest number satisfying the statement is $n = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$.