Problema săptămânii 286

Fie $1 \leq a, b, c, d \leq 4$ numere reale. Arătaţi că

$$16 \leq (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leq 25.$$

Szoldatics József, KöMaL, nr. 11/2021

Soluţie: Fie $S = a+b+c+d$ şi $T = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.
Inegalitatea din stânga este clasică. Ea rezultă, pentru orice $a, b, c, d > 0$, din inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică. Egalitatea are loc atunci când $a = b = c = d \in [1, 4]$.
Din $(a-1)(a-4) \leq 0$ deducem succesiv $a^2 + 4 \leq 5a$ şi $a + \frac{4}{a} \leq 5$. Scriind relaţii analoage pentru b, c, d şi adunând, obţinem $S + 4T \leq 20$, deci $S^2 + 4ST \leq 20S$, de unde $4ST \leq S(20-S) \leq 100$, de unde concluzia. Ultima inegalitate, $S(20-S) \leq 100$ este echivalentă cu $(S-10)^2 \geq 0$, care este evidentă.
Egalitatea are loc dacă $a, b, c, d \in \{1, 4\}$ şi $S = 10$, adică atunci când două dintre numerele a, b, c, d sunt egale cu 1, iar celelalte două cu 4.

Remarcă: Inegalitatea $\frac{4}{x} \leq 5 - x$, $\forall x \in [1, 4]$ rezultă şi din considerente de convexitate: funcţia $x \mapsto \frac{4}{x}$ este convexă, deci graficul ei este, pe intervalul $[1, 4]$ sub coarda care uneşte punctele de abscisă 1 şi 4 de pe grafic, $(1, 4)$ şi $(4, 1)$.

Remarcă: Privind expresia $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) + \frac{1}{a}(b+c+d) + 1 + (b+c+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ ca funcţie de a, se vede că ea este convexă (este suma dintre o funcţie afină şi una convexă), deci ea îşi atinge maximul la unul dintre capete. Aşadar, pentru ca expresia să fie maximă este necesar ca $a \in \{1, 4\}$. Din acelaşi motiv este necesar ca $b, c, d \in \{1, 4\}$. De aici nu mai rămân de comparat decât valorile pe care le ia expresia atunci când o parte dintre variabile sunt egale cu 1, iar celelalte cu 4. Sunt cinci asemenea cazuri (putem avea niciun 1, un 1, doi de 1, trei de 1 sau patru de 1) în care expresia ia doar trei valori distincte: 16, $\frac{91}{4}$ şi 25. Cea mai mare dintre acestea este 25.

Inegalitatea e un caz particular al inegalităţii lui Schweitzer.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Daniel Văcaru, Radu Stoleriu, Andrei Pană, Emanuel Mazăr, Ştefan Gobej* şi *Denis Nica.*

Problem of the week no. 286

Let $1 \le a, b, c, d \le 4$ be real numbers. Prove that

$$16 \le (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \le 25.$$

Szoldatics József, KöMaL, no. 11/2021

Solution: Put $S = a+b+c+d$ and $T = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.
The first inequality is classical. It follows, for any positive a, b, c, d, from the $HM - AM$ inequality. Equality holds when $a = b = c = d \in [1, 4]$.
From $(a-1)(a-4) \le 0$ we successively get $a^2 + 4 \le 5a$ and $a + \frac{4}{a} \le 5$. Writing similar inequalities for b, c, d and adding the four inequalities yields $S + 4T \le 20$, i.e. $S^2 + 4ST \le 20S$, which leads to $4ST \le S(20 - S) \le 100$, and the conclusion. The last inequality, $S(20 - S) \le 100$ is equivalent to $(S - 10)^2 \ge 0$, which is clear.
Equality holds when $a, b, c, d \in \{1, 4\}$ and $S = 10$, i.e. when two of the numbers a, b, c, d are equal to 1, while the other two are equal to 4.

Remark: The inequality $\frac{4}{x} \le 5 - x$, $\forall\, x \in [1, 4]$ follows from convexity: the function $x \mapsto \frac{4}{x}$ is convex, therefore its graph is, on the interval, beneath the chord joining the points of x-coordinate 1 and 4 of the graph, namely $(1, 4)$ and $(4, 1)$.

Remark: Treating the expression $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) + \frac{1}{a}(b+c+d) + 1 + (b+c+d)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ as a function of variable a, it is clear that this function is convex, therefore its maximum is at one of the endpoints of the interval. Therefore, in order for the expression to be maximal, it is necessary that $a \in \{1, 4\}$. For the same reason, we must have $b, c, d \in \{1, 4\}$. Now we only need to compare the values of the expression in the cases when some of the variables are equal to 1, while the remaining ones are equal to 4. There are five such cases (we can have $0, 1, 2, 3$, or 4 numbers equal to 1). In these five cases the expression takes only three distinct values: 16, $\frac{91}{4}$ şi 5. The largest of them is 25.

The inequality is a particular case of Schweitzer's inequality.