BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 19 februarie 2022 (barajul 2)

Problema 1. Aflați toate numerele reale x pentru care

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x - 2022.$$

Problema 2. Aflați toate perechile de numere prime (p, q) care satisfac ecuația

$$p^3 + q^3 + 1 = p^2 q^2.$$

Problema 3. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi fie D, E, F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, M piciorul înălţimii din A şi P mijlocul lui $[OM]$. Paralela prin P la AM intersectează dreptele DE şi OA în punctele T, respectiv Z. Arătaţi că:
a) triunghiul DZE este isoscel;
b) aria triunghiului DZE este dată de formula $\mathscr{A}_{DZE} = \dfrac{BC \cdot OF}{8}$.

Problema 4. Fie A o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ cu proprietatea:

Pentru fiecare $x, y \in A$ cu $x \neq y$, are loc relaţia $\left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right| > \dfrac{1}{1000}$.

Găsiți numărul maxim posibil de elemente pe care îl poate avea mulţimea A.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Aflați toate numerele reale x pentru care

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x - 2022.$$

Soluţie:
Evident $x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 2022$ trebuie să fie număr întreg. Deoarece (pentru $x \geq 0$) numerele $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ şi $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ reprezintă câtul împărţirii lui x la 2, respectiv la 3, ne interesează restul împărţirii lui x la 6:
• dacă $x = 6k$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+2k = 6k-2022$, cu soluţia $k = 2022$, adică $x = 12132$;
• dacă $x = 6k+1$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+2k = 6k+1-2022$, cu soluţia $k = 2021$, adică $x = 12127$;
• dacă $x = 6k+2$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+1+2k = 6k+2-2022$, cu soluţia $k = 2021$, adică $x = 12128$;
• dacă $x = 6k+3$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+1+2k+1 = 6k+3-2022$, cu soluţia $k = 2021$, adică $x = 12129$;
• dacă $x = 6k+4$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+2+2k+1 = 6k+4-2022$, cu soluţia $k = 2021$, adică $x = 12130$;
• dacă $x = 6k+5$, cu k întreg, ecuaţia devine $3k+2+2k+1 = 6k+5-2022$, cu soluţia $k = 2020$, adică $x = 12125$.
În concluzie, soluţiile sunt: 12125, 12127, 12128, 12129, 12130 şi 12132.

Problema 2. Aflați toate perechile de numere prime (p, q) care satisfac ecuația

$$p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2.$$

Soluţie:
Datorită simetriei, putem deocamdată căuta perechile cu $p \geq q$. Relaţia din enunţ, scrisă sub forma $p^2(q^2-p) = (q+1)(q^2-q+1)$, arată că $p^2 \mid (q+1)(q^2-q+1)$. Deoarece $p^2 \geq q^2 > q+1$ şi $p^2 \geq q^2 > q^2-q+1$, singura posibilitate este ca $p \mid q+1$ şi $p \mid q^2-q+1$. Prima condiţie implică $q \leq p \leq q+1$. Nu putem avea $p = q$ deoarece q nu divide $q+1$. Trebuie aşadar ca $p = q+1$. Singure numere consecutive prime sunt 2 şi 3, deci numerele trebuie să fie 2 şi 3.
Reciproc, se verifică imediat că perechile $p = 2$, $q = 3$ şi $p = 3$, $q = 2$ satisfac relaţia din enunţ.

Problema 3. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi fie D, E, F mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, M piciorul înălţimii din A şi P mijlocul lui $[OM]$. Paralela prin P la AM intersectează dreptele DE şi OA în punctele T, respectiv Z. Arătaţi că:
a) triunghiul DZE este isoscel;
b) aria triunghiului DZE este dată de formula $\mathscr{A}_{DZE} = \dfrac{BC \cdot OF}{8}$.

Soluţie:

a) PZ este linie mijlocie în triunghiul OAM, deci Z este mijlocul lui $[OA]$. Deoarece $m(\sphericalangle ADO) = m(\sphericalangle AEO) = 90°$, patrulaterul $ADOE$ este inscriptibil. Centrul cercului circumscris acestuia este mijlocul diametrului $[AO]$, adică Z. Avem, aşadar, $ZD = ZE(= ZA = ZO)$.

b) Omotetia de centru A şi raport 2 duce triunghiul ADE în triunghiul ABC, deci duce centrul cercului cirumscris lui ADE în centrul cercului circumscris lui ABC şi mijlocul lui $[DE]$ în mijlocul lui $[BC]$. Astfel, punctele A, T, F sunt coliniare, iar $[ZT]$ este linie mijlocie în triunghiului AOF. Aşadar, $\mathscr{A}_{DZE} = \dfrac{ZT \cdot DE}{2} = \dfrac{\frac{OF}{2} \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \dfrac{BC \cdot OF}{8}$.

Mai direct: raportul de asemănare (omotetie) dintre triunghiul OBC şi ZDE fiind $k = 2$, raportul ariilor este $k^2 = 4$.

Problema 4. Fie A o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ cu proprietatea:

Pentru fiecare $x, y \in A$ cu $x \neq y$, are loc relaţia $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| > \dfrac{1}{1000}$.

Găsiți numărul maxim posibil de elemente pe care îl poate avea mulţimea A.

Soluţie:

Observăm că $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > \dfrac{1}{1000}$ pentru orice $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ deci putem alege $1, 2, 3, \ldots, 31 \in A$.

Pentru $n \geq 32$ avem $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{1000}$, deci A nu poate conţine două numere consecutive mai mari ca 31.

Mai mult, avem $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{2}{n(n+2)} > \dfrac{1}{1000}$ dacă $n \leq 43$, dar $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{2}{n(n+2)} < \dfrac{1}{1000}$ dacă $n > 43$. Aceste inegalităţi arată că putem lua cel mult câte un element din fiecare din mulţimile:

$X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$, ... , $X_{31} = \{31\}$, $X_{32} = \{32, 33\}$, $X_{33} = \{34, 35\}$, ... , $X_{37} = \{42, 43\}$, $X_{38} = \{44, 45, 46\}$, $X_{39} = \{47, 48, 49\}$, $X_{40} = \{50\}$.

Prin urmare, A poate avea cel mult 40 de elemente.

(Faptul că dintre numerele 48, 49, 50 putem alege cel mult un număr ne conduce la exemplul de mai jos.)

Exemplul de mai jos arată că A chiar poate avea 40 de elemente:

$A = \{1, 2, \ldots, 31, 32, 34, \ldots, 42, 44, 47, 50\}$. Este suficient să verificăm că diferenţa inverselor a oricare două elemente consecutive din A este mai mare ca $\dfrac{1}{1000}$.

Avem $1-\frac{1}{2} > \frac{1}{2}-\frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{31}-\frac{1}{32} = \frac{1}{992} > \frac{1}{1000}$,
$\frac{1}{32}-\frac{1}{34} > \frac{1}{34}-\frac{1}{36} > \ldots > \frac{1}{42}-\frac{1}{44} = \frac{1}{924} > \frac{1}{1000}$ şi $\frac{1}{44}-\frac{1}{47} > \frac{1}{47}-\frac{1}{50} = \frac{3}{2350} > \frac{1}{1000}$.
În concluzie, numărul maxim de elemente pe care îl poate avea o submulţime A cu proprietatea din enunţ este 40.