BARAJ DE JUNIORI ,,Euclid”
Cipru, 29 ianuarie 2022 (barajul 1)

Problema 1. Găsiți toate valorile întregi ale lui x pentru care valoarea expresiei $x^2 + 6x + 33$ este un pătrat perfect.

Problema 2. Pe laturile AB şi CD ale pătratul $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $DE \parallel BF$. Presupunem că triunghiurile dreptunghice EAD şi BCF şi paralelogramul $BEDF$ au aceeaşi arie.
Dacă distanța dintre paralelele DE și BF este egală cu 1, calculați aria pătratului.

Problema 3. Dacă x şi y sunt numere reale cu $x + y \geq 0$, găsiţi valoarea minimă a expresiei $K = x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 4x + 7$.
Pentru ce valori ale lui x, y îşi atinge expresia K valoarea minimă?

Problema 4. Se dau cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
(a) Folosind cifrele de mai sus, găsiți câte numere de șapte cifre cu cifre diferite se pot forma.
(b) Dacă plasăm toate aceste numere de șapte cifre în ordine crescătoare, găsiți numărul de șapte cifre situat pe poziția a 2022-a.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Găsiți toate valorile întregi ale lui x pentru care valoarea expresiei $x^2 + 6x + 33$ este un pătrat perfect.

Soluţie:
Dacă $x^2+6x+33 = y^2$ cu $y \in \mathbb{N}$, atunci $x^2+6x+9+24 = y^2$, adică $24 = y^2-(x+3)^2$, deci $24 = (y-x-3)(y+x+3)$. Cum suma şi produsul celor doi factori sunt nenegative, factorii sunt nenegativi. În plus, suma este pară, deci factorii sunt pari. Sunt posibile cazurile:
I. $y-x-3 = 2$, $y+x+3 = 12$. Obţinem $x = 2$ (şi $y = 7$).
II. $y-x-3 = 4$, $y+x+3 = 6$. Obţinem $x = -2$ (şi $y = 5$).
III. $y-x-3 = 6$, $y+x+3 = 4$. Obţinem $x = -4$ (şi $y = 5$).
IV. $y-x-3 = 12$, $y+x+3 = 2$. Obţinem $x = -8$ (şi $y = 7$).
În concluzie, valorile căutate ale lui x sunt -8, -4, -2 şi 2.

Problema 2. Pe laturile AB şi CD ale pătratul $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $DE \parallel BF$. Presupunem că triunghiurile dreptunghice EAD şi BCF şi paralelogramul $BEDF$ au aceeaşi arie.
Dacă distanța dintre paralelele DE și BF este egală cu 1, calculați aria pătratului.

Soluţie:
Să notăm cu a lungimea laturii pătratului. Atunci fiecare din cele trei poligoane trebuie să aibă aria $\frac{a^2}{3}$, deci $AE = CF = \frac{2a}{3}$. Deducem că $DE = \frac{a\sqrt{13}}{3}$, deci aria paralelogramului $BEDF$ este $\frac{a^2}{3} = \frac{a\sqrt{13}}{3} \cdot 1$, de unde $a = \sqrt{13}$, iar aria pătratului este $a^2 = 13$.

Problema 3. Dacă x şi y sunt numere reale cu $x + y \geq 0$, găsiţi valoarea minimă a expresiei $K = x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 4x + 7$.
Pentru ce valori ale lui x, y îşi atinge expresia K valoarea minimă?

Soluţie:
$K = (x-y)(x^4 - y^4) + x^2 + 4x + 7 = (x-y)^2(x+y)(x^2+y^2) + (x+2)^2 + 3 \geq 3$, deci valoarea minimă este 3, atinsă atunci când primii doi termeni sunt egali cu 0, adică pentru $x = -2$ şi $y = \pm 2$. Însă $x = y = -2$ nu satisface condiţia $x + y \geq 0$. Rămâne aşadar $x = -2$, $y = 2$.

Problema 4. Se dau cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
(a) Folosind cifrele de mai sus, găsiți câte numere de șapte cifre cu cifre diferite se pot forma.
(b) Dacă plasăm toate aceste numere de șapte cifre în ordine crescătoare, găsiți numărul de șapte cifre situat pe poziția a 2022-a.

Soluţie:
a) Prima cifră a numărului poate fi aleasă în 7 moduri, cea de-a doua în 6 moduri şi aşa mai departe, astfel că în total sunt $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ numere cu şapte cifre distincte din mulţimea de cifre dată.
b) Lista acestor numere, scrise în ordine crescătoare, începe cu $6! = 720$ de numere care au prima cifră 1. Urmează 720 de numere care au prima cifră 2. Până aici sunt 1440 de numere. Următoarele 720 de numere, printre care şi cel de-al 2022-lea, încep cu cifra 3.
Dintre acestea, primele 120, încep cu cifrele 31, următoarele 120 cu 32, următoarele 120 cu 34, următoarele 120 cu 35. Până aici sunt 1920 de numere în listă. În următorul grup de 120 de numere, cel al numerelor care încep cu 36, se află şi numărul căutat.
Avem 24 de numere care încep cu 361, 24 de numere care încep cu 362, 24 de numere care încep cu 364, 24 de numere care încep cu 365. Până aici sunt 2016 numere. Următoarele 6 numere încep cu 3671. Numărul căutat este ultimul din acest grup de 6, şi anume 3671542.