Problema săptămânii 285

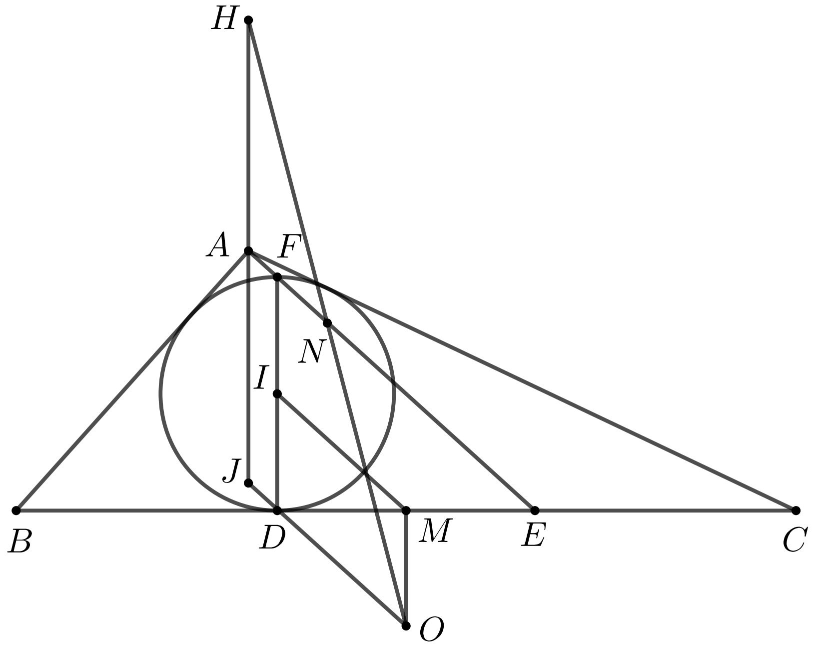
Fie ABC un triunghi scalen în care I şi O sunt centrele cercurilor înscris, respectiv circumscris. Fie N centrul cercului celor 9 puncte al triunghiului ABC şi M mijlocul laturii (BC). Ştiind că mijlocul lui (OI) se află pe latura (BC), arătaţi că IM este paralelă cu AN.

Todor Zaharinov, Mathematical Reflections nr. 5/2021

Soluţie: Fie D punctul de tangenţă al cercului înscris cu latura BC şi F simetricul lui D faţă de I. Se ştie (vezi prima dintre cele Three Geometry Lemmas) că AF intersectează BC în punctul de tangenţă al cercului A-exînscris cu latura BC. Acest punct, E, este simetricul lui D faţă de M. Atunci $[MI]$ este linie mijlocie în triunghiul DEF, deci $MI \parallel EF$. Deoarece $A \in EF$, rămâne să mai demonstrăm că $N \in EF$. În patrulaterul $IDOM$ avem $MO \parallel ID$ şi ştim că mijlocul diagonalei IO se află pe diagonala MD, deci $IDOM$ este paralelogram, iar unghiul A este obtuz. Atunci $m(\sphericalangle BOC) = 2(180° - m(\sphericalangle BAC))$, deci $m(\sphericalangle BOM) = 180° - m(\sphericalangle BAC)$.

Atunci $\cos(\sphericalangle BAC) = -\cos(\sphericalangle BOM) = -\dfrac{MO}{BO} = -\dfrac{ID}{BO} = -\dfrac{r}{R}$.

Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, iar $\{J\} = AH \cap OD$, se ştie că $AH = |2R\cos(\sphericalangle BAC)| = 2r$. Cum $AJ \parallel FD$ (ambele perpendiculare pe BC) şi $JD \parallel AF$ (ambele paralele cu MI), patrulaterul $AJDF$ este paralelogram, deci $AJ = DF = 2r = AH$, deci A este mijlocul lui $[HJ]$. Cum N este mijlocul lui $[HO]$, $[AN]$ este linie mijlocie în triunghiul HJO, deci $AN \parallel JO \parallel IM$, adică $N \in AF$.



Altă finalizare: Dacă $\{X\} = MO \cap AE$, atunci $MX = \dfrac{FD}{2} = \dfrac{AH}{2} = MO$, deci $AHXO$ este paralelogram, prin urmare N, care este mijlocul lui $[OH]$, este şi mijlocul lui $[AX]$. (De fapt X este centrul cercului circumscris ΔHBC.)

Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu* şi *David Ghibu*.

Problem of the week no. 285

Let ABC be a scalene triangle with incenter I and circumcenter O. Let N be the center of the nine-point circle of triangle ABC and M be the midpoint of BC. Knowing that the midpoint of OI lies on side BC, prove that IM is parallel to AN.

Todor Zaharinov, Mathematical Reflections no. 5/2021

You can read the solution published in Mathematical Reflections, on page 26.