Problema săptămânii 284

Fie n şi k două numere naturale, cu $n \geq 3$. Théo organizează alegerile pentru reprezentanţii clasei sale care are n elevi: fiecare elev trebuie să voteze pentru unul dintre colegii săi (toţi elevii din clasă pot fi votaţi) şi nimeni nu se poate vota pe sine însuşi. Apoi Théo împarte elevii în grupe astfel încât, dacă un elev se află într-una dintre grupe, elevul pe care acesta l-a votat se află într-o altă grupă.
Pentru ce valori ale lui k este Théo sigur că poate împărţi elevii în cel mult k grupe, indiferent de modul în care au votat elevii?

baraj juniori Franţa, 2021

Soluţie:
Vom demonstra că sunt necesare 3 grupe, apoi că Théo se poate întotdeauna descurca să facă 3 grupe. Concluzia este că orice $k \geq 3$ satisface condiţiile problemei.
Dacă A, B şi C sunt trei dintre elevii clasei şi A îl votează pe B, B îl votează pe C şi C îl votează pe A, atunci elevii A, B şi C trebuie să facă parte din trei grupe diferite, deci sunt necesare (cel puţin) 3 grupe.
Vom demonstra prin inducţie după n, numărul elevilor, că elevii clasei pot fi împărţiţi în 3 grupe astfel încât nimeni să nu fie în aceeaşi grupă cu elevul pe care l-a votat, şi asta chiar şi dacă modificăm regulile votării şi permitem şi voturi nule (unii elevi nu votează pe nimeni).
Pentru $n = 3$ este clar că 3 grupe sunt suficiente: plasăm fiecare elev singur în câte o grupă.
Presupunem afirmaţia de mai sus adevărată pentru o clasă cu n elevi ($n \geq 3$). Să o demonstrăm pentru o clasă cu $n + 1$ elevi. Deoarece sunt $n + 1$ elevi care au primit în total cel mult $n+1$ voturi, va exista un elev care a primit cel mult un vot. Alegem un asemenea elev, Ana. O scoatem, momentan, pe Ana din clasă. Dacă există vreun elev care a votat-o pe Ana, îi anulăm votul. Fiecare din cei n elevi rămaşi, fie a votat un alt elev din cei n, fie a dat un vot nul (nu a votat pe nimeni). Din ipoteza de inducţie, aceşti n elevi pot fi împărţiţi în 3 grupe astfel încât în niciuna dintre grupe să nu existe doi elevi dintre care unul l-a votat pe celălalt. Acum o chemăm înapoi pe Ana. Sunt cel mult două grupe în care n-o putem pune pe Ana: cea care îl conţine pe elevul care a votat-o pe Ana (dacă există) şi cea care conţine elevul votat de Ana (dacă există). Oricum, rămâne (cel puţin) o grupă în care să o pună pe Ana.

Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu, Emanuel Mazăre* şi *David Ghibu.*

Problem of the week no. 284

Let n and k be two positive integers, with cu $n \geq 3$. Théo organizes the elections for the representatives of his class, which has n students: each student must vote for one of his colleagues (all the students ale eligible and nobody can vote for himself). Then, Théo divides the students in groups such that, if a student is in one group, the student he has voted for is in another group.
For which values of k can Théo be sure that he can divide the students into at most k groups, irrespective on the way the students have voted?

junior TST, France, 2021

Solution:
First, we prove that 3 groups are necessary, then we prove that Théo can always divide the students into three groups. The conclusion is that any $k \geq 3$ satisfies the given conditions.
If A, B and C are three of the students and A votes for B, B votes for C, and C votes for A, then students A, B and C must be in three different groups. Thus, Théo needs (at least) 3 groups.
We prove by induction on n, the number of students, that the students of the class can be split into 3 groups such that nobody voted for a member of his own group, and, moreover, this can be done even if we change the rules of the election and we allow students to cast a blank vote (not to vote for anyone).
For $n = 3$ it is clear that 3 groups are sufficient: simply place each student into a group of his own.
Assume the statement above to be true for a class with n students ($n \geq 3$). Let us prove it for a class with $n+1$ students. As there are $n+1$ students that have received, in total, at most $n+1$ votes, there must be a student that has received at most one vote. Let Ann be one such students. Now, let us ask Ann to temporarily leave the class. If there is a student that has voted for Ann, we replace his vote by a blank vote. Now we have a class of n, in which everybody voted within the class of n (or gave a blank vote). From the inductive hypothesis it follows that these n students can br split into 3 groups such that nobody voted for a member of his own group. Now we ask Ann to return. There are at most two groups in which introducing Ann would pose a problem: the group containing the student that has voted for Ann (if any), and the group containing the student Ann has voted for (if any). In any case, there is at least one group available for Ann.