Problema săptămânii 283

Determinaţi toate numerele naturale n pentru care $3n + 1$ şi $6n - 2$ sunt pătrate perfecte, iar $6n^2 - 1$ este număr prim.

Olimpiada Tuymaada, juniori, 2003

Soluţia 1:
Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $3n + 1 = a^2$, $6n - 2 = 4b^2$. Atunci $4a^2b^2 = 18n^2 - 2$, adică $2a^2b^2 + 1 = 9n^2$. Deducem că $3 \nmid ab$, deci $ab = 3d \pm 1$, $d \in \mathbb{N}^*$. Atunci $9n^2 = 2(3d \pm 1)^2 + 1 = 18d^2 \pm 12d + 3$, deci $6n^2 - 1 = 12d^2 \pm 8d + 1 = (2d \pm 1)(6d \pm 1)$ e prim numai dacă unul dintre factorii $2d \pm 1$ şi $6d \pm 1$ este 1. Acest lucru se întâmplă numai dacă $d = 1$ şi $2d \pm 1 = 1$ (adică semnul este $-$), adica pentru $n = 1$. Într-adevăr, $n = 1$ satisface condiţiile din enunţ.

Soluţia 2: (*Andrei Pană*)
Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3n + 1 = x^2$, $6n - 2 = y^2$. Notăm $6n^2 - 1 = p$, număr prim. Atunci $x^2y^2 = 18n^2 - 2$, deci $3p = 18n^2 - 3 = x^2y^2 - 1 = (xy - 1)(xy + 1)$. Evident p este impar, deci $p \geq 3$. Cum $xy - 1 < xy + 1$, sunt posibile două cazuri: $xy - 1 = 1$, $xy + 1 = 3p$ sau $xy - 1 = 3$, $xy + 1 = p$. Primul caz conduce la $p = 1$ şi nu convine. Cazul al doilea conduce la $p = 5$, apoi la $n = 1$. Se verifică uşor că $n = 1$ are într-adevăr proprietăţile cerute.

Am primit soluţii de la: *Andrei Pană, Emanuel Mazăre, Radu Stoleriu, David Ghibu, Ştefan Gobej* şi *Denis Nica*.

Problem of the week no. 283

Determine all positive integers n such that $3n + 1$ and $6n - 2$ are perfect squares, while $6n^2 - 1$ is a prime number.

Tuymaada Mathematical Olympiad, juniors, 2003

Solution:
Let $a, b \in \mathbb{N}$ be such that $3n + 1 = a^2$, $6n - 2 = 4b^2$. We have $4a^2b^2 = 18n^2 - 2$, i.e. $2a^2b^2 + 1 = 9n^2$. We deduce that $3 \nmid ab$, so $ab = 3d \pm 1$, $d \in \mathbb{N}$. Then $9n^2 = 2(3d \pm 1)^2 + 1 = 18d^2 \pm 12d + 3$, hence $6n^2 - 1 = 12d^2 \pm 8d + 1 = (2d \pm 1)(6d \pm 1)$ is a prime only if one of the factors $2d \pm 1$ and $6d \pm 1$ is 1. This only happens when $d = 1$ and $2d \pm 1 = 1$ (i.e. the sign is $-$). We get $n = 1$, which does indeed satisfy all the requirements.

Solution 2: (*Andrei Pană*)
Let $x, y \in \mathbb{N}$ be such that $3n + 1 = x^2$, $6n - 2 = y^2$. Put $6n^2 - 1 = p$, a prime number. We have $x^2y^2 = 18n^2 - 2$, therefore $3p = 18n^2 - 3 = x^2y^2 - 1 = (xy - 1)(xy + 1)$. Clearly p is odd, so $p \geq 3$. As $xy - 1 < xy + 1$, there are two possibilities: $xy - 1 = 1$, $xy + 1 = 3p$ or $xy - 1 = 3$, $xy + 1 = p$. The first case leads to $p = 1$ which is not a

prime. The second case leads to $p = 5$, then to $n = 1$. It is easy to check that $n = 1$ does indeed fulfill all the conditions.