Problema săptămânii 282

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, şi $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $a^{n+1} + b^{n+1} = 2$. Arătaţi că:
a) $a^n + b^n \geq a^{n-1} + b^{n-1}$; b) $a^n + b^n \geq a^{n-2} + b^{n-2}$.

Alin Pop, GM. nr. 6-7-8/2021

Soluţie:
a) Vom demonstra inegalitatea

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-1} \geq x^{n+1} - 1, \ \forall\, x \in (0, 2). \qquad (*)$$

Scriind-o pentru $x = a$ şi $x = b$ (evident, $a, b < 2$) şi adunând inegalităţile obţinute, rezultă inegalitatea de la a).
Inegalitatea $(*)$ se demonstrează astfel:

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-1} - x^{n+1} + 1 = (x-1)[(n+1)x^{n-1} - (x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)] =$$

$$(x-1)[(x^{n-1} - x^n) + (x^{n-1} - x^{n-1}) + (x^{n-1} - x^{n-2}) + \ldots + (x^{n-1} - x) + (x^{n-1} - 1)] =$$
$$(x-1)^2[-x^{n-1} + x^{n-2} + (x^{n-2} + x^{n-3}) + \ldots + (x^{n-2} + \ldots + x) + (x^{n-2} + \ldots + 1)] =$$
$$(x-1)^2(-x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1).$$

Cum $x < 2 \leq n-1$, avem $(n-1)x^{n-2} - x^{n-1} > 0$.
Aşadar, inegalitatea $(*)$ este demonstrată, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 1$. Aşadar, egalitate în inegalitatea de la a) avem pentru $a = b = 1$.

b) Vom demonstra inegalitatea

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-2} \geq 2x^{n+1} - 2, \ \forall\, a, b \in (0, \sqrt[n]{2}). \qquad (**)$$

Avem

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-2} - 2x^{n+1} + 2 = (x-1)[(n+1)x^{n-2}(x+1) - 2(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)] =$$

$$(x-1)[\sum_{k=0}^{n}(x^{n-1} - x^k) + \sum_{k=0}^{n}(x^{n-2} - x^k)] =$$

$$(x-1)[\sum_{k=0}^{n} x^k(x^{n-k-1} - 1) + \sum_{k=0}^{n} x^k(x^{n-k-2} - 1)] =$$

$$(x-1)^2[\sum_{k=0}^{n-3}(x^k + x^{k+1} + \ldots + x^{n-2}) + \sum_{k=0}^{n-3}(x^k + x^{k+1} + \ldots + x^{n-3}) - 2x^{n-1} - x^{n-2}] =$$

$$(x-1)^2[-2x^{n-1} + (n-3)x^{n-2} + \ldots].$$

Pentru $n \geq 6$ avem $-2x^{n-1} + (n-3)x^{n-2} \geq -2x^{n-1} + 3x^{n-2} = x^{n-2}(3 - 2x) > 0$ căci $x < \sqrt[n]{2} < \frac{3}{2}$.

Pentru $n = 3$, inegalitatea (**) revine la $-2(x-1)^3(x+1) \geq 0$, care nu este adevărată. Vom demonstra inegalitatea de la b), în cazul $n = 3$, direct.
Dacă $a^4 + b^4 = 2$, atunci $a^3 + b^3 \geq a + b$ revine la $2(a^3 + b^3)^2 \geq (a^4 + b^4)(a + b)^2$, deci, notând $\frac{a}{b} = x$, la $2x^6 + 4x^3 + 2 \geq x^6 + 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1$, deci la $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^4 - 2x^2 + 1) \geq 0$.

Pentru $n = 4$, inegalitatea $(**)$ rezultă din $5x^4 - 5x^2 - 2x^5 + 2 = (x-1)^2(-2x^3 + x^2 + 4x + 2) > 0$ căci $x^5 < 2$ implică $x^2 < 2$, deci $-2x^3 + 4x > 0$.

Pentru $n = 5$, inegalitatea $(**)$ rezultă din $6x^5 - 6x^3 - 2x^6 + 2 = 2(x-1)^2(x + 1)(-x^3 + 2x^2 + x + 1) > 0$ căci $x^6 < 2$ implică $x < 2$.

Remarcă: (*Denis Nica*)
Inegalitatea $(*)$ se demonstrează uşor folosind derivate (dar această demonstraţie depăşeşte nivelul de junior).
Într-adevăr, funcţia $f(x) = (n+1)x^n - (n+1)x^{n-1} - x^{n+1} + 1$ are derivata $f'(x) = (n+1)x^{n-2}(nx - n + 1 - x^2) = (n+1)x^{n-2}(x-1)(n-1-x)$ care este negativă pe $(0, 1)$ şi pozitivă pe $(1, 2)$, deci funcţia are un minim în $x = 1$, minim egal cu 0.

Remarcă: b) $\Rightarrow$ a)
Întrădevăr, b) $\Rightarrow (a^n + b^n)^2 \geq (a^n + b^n)(a^{n-2} + b^{n-2}) \overset{CBS}{\geq} (a^{n-1} + b^{n-1})^2$.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Emanuel Mazăre* şi *Denis Nica.*

Problem of the week no. 282

Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, and $a, b \in (0, \infty)$ such that $a^{n+1} + b^{n+1} = 2$. Prove that:
a) $a^n + b^n \geq a^{n-1} + b^{n-1}$; b) $a^n + b^n \geq a^{n-2} + b^{n-2}$.

Alin Pop, GM. nr. 6-7-8/2021

Solution:
a) We prove the inequality

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-1} \geq x^{n+1} - 1, \ \forall\, x \in (0, 2). \qquad (*)$$

Writing it for $x = a$ and $x = b$ (clearly, $a, b < 2$) and adding the two inequalities, we obtain the inequality from a).
Inequality $(*)$ can be proven as follows:

$$(n+1)x^n - (n+1)x^{n-1} - x^{n+1} + 1 = (x-1)[(n+1)x^{n-1} - (x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)] =$$

$$(x-1)[(x^{n-1} - x^n) + (x^{n-1} - x^{n-1}) + (x^{n-1} - x^{n-2}) + \ldots + (x^{n-1} - x) + (x^{n-1} - 1)] =$$

$$(x-1)^2[-x^{n-1} + x^{n-2} + (x^{n-2} + x^{n-3}) + \ldots + (x^{n-2} + \ldots + x) + (x^{n-2} + \ldots + 1)] =$$

$$(x-1)^2(-x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1).$$

As $x<2\le n-1$, we have $(n-1)x^{n-2}-x^{n-1}>0$.
Thus, inequality $(*)$ is proven, with equality holding when $x=1$. We conclude that for our inequality, equality holds when $a=b=1$.

b) We prove the inequality

$$(n+1)x^n-(n+1)x^{n-2}\ge 2x^{n+1}-2,\ \forall\, a,b\in(0,\sqrt[n]{2}). \qquad (**)$$

We have

$$(n+1)x^n-(n+1)x^{n-2}-2x^{n+1}+2=(x-1)[(n+1)x^{n-2}(x+1)-2(x^n+x^{n-1}+\ldots+1)]=$$

$$(x-1)[\sum_{k=0}^{n}(x^{n-1}-x^k)+\sum_{k=0}^{n}(x^{n-2}-x^k)]=$$

$$(x-1)[\sum_{k=0}^{n}x^k(x^{n-k-1}-1)+\sum_{k=0}^{n}x^k(x^{n-k-2}-1)]=$$

$$(x-1)^2[\sum_{k=0}^{n-3}(x^k+x^{k+1}+\ldots+x^{n-2})+\sum_{k=0}^{n-3}(x^k+x^{k+1}+\ldots+x^{n-3})-2x^{n-1}-x^{n-2}]=$$

$$(x-1)^2[-2x^{n-1}+(n-3)x^{n-2}+\ldots].$$

For $n\ge 6$ we have $-2x^{n-1}+(n-3)x^{n-2}\ge -2x^{n-1}+3x^{n-2}=x^{n-2}(3-2x)>0$ because $x<\sqrt[n]{2}<\frac{3}{2}$.

For $n=3$, inequality (**) reduces to $-2(x-1)^3(x+1)\ge 0$, which is not true. We prove the inequality from b), in case $n=3$, directly.
If $a^4+b^4=2$, then $a^3+b^3\ge a+b$ reduces to $2(a^3+b^3)^2\ge(a^4+b^4)(a+b)^2$, i.e., putting $\frac{a}{b}=x$, it reduces to $2x^6+4x^3+2\ge x^6+2x^5+x^4+x^2+2x+1$, i.e. to $x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1=(x-1)^2(x^4-2x^2+1)\ge 0$.

For $n=4$, inequality $(**)$ follows from $5x^4-5x^2-2x^5+2=(x-1)^2(-2x^3+x^2+4x+2)>0$ because $x^5<2$ implies $x^2<2$, i.e. $-2x^3+4x>0$.

For $n=5$, inequality $(**)$ follows from $6x^5-6x^3-2x^6+2=2(x-1)^2(x+1)(-x^3+2x^2+x+1)>0$ because $x^6<2$ implies $x<2$.

Remark: b) $\Rightarrow$ a)
Indeed, b) $\Rightarrow (a^n+b^n)^2\ge(a^n+b^n)(a^{n-2}+b^{n-2})\overset{CBS}{\ge}(a^{n-1}+b^{n-1})^2$.