Problema săptămânii 282

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, şi $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât $a^{n+1} + b^{n+1} = 2$. Arătaţi că:
a) $a^n + b^n \geq a^{n-1} + b^{n-1}$; b) $a^n + b^n \geq a^{n-2} + b^{n-2}$.

Alin Pop, GM. nr. 6-7-8/2021

Problem of the week no. 282

Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, and $a, b \in (0, \infty)$ such that $a^{n+1} + b^{n+1} = 2$. Prove that:
a) $a^n + b^n \geq a^{n-1} + b^{n-1}$; b) $a^n + b^n \geq a^{n-2} + b^{n-2}$.

Soluție de Marian Cucoaneș

Alin Pop, GM. nr. 6-7-8/2021

Vom demonstra mai întâi inegalitatea de la b)

Deoarece condiția inițială și inegalitățile ce trebuiesc demonstrate sunt simetrice în variabilele a și b, putem presupune $a \geqslant b$.

Din $a \geqslant b$ și $a^{n+1} + b^{n+1} = 2 \Rightarrow a \geqslant 1 \geqslant b > 0$.

Din inegalitatea mediilor $\Rightarrow 2 = a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant 2\sqrt{(ab)^{n+1}} \Rightarrow 0 < ab \leq 1$

Avem: $a^n - a^{n-2} + b^n - b^{n-2} = (a^{n-1} + a^{n-2})(a-1) + (b^{n-1} + b^{n-2})(b-1) = (a^{n+1}-1)\left(\frac{a^{n-1}+a^{n-2}}{a^n+a^{n-1}+\dots+a+1}\right) + (b^{n+1}-1)\left(\frac{b^{n-1}+b^{n-2}}{b^n+b^{n-1}+\dots+b+1}\right) \underline{\underline{-a^{n+1}+1 = b^{n+1}-1}}$

$$= (a^{n+1}-1)\left(\frac{a^{n-1}+a^{n-2}}{a^n+a^{n-1}+\dots+a+1} - \frac{b^{n-1}+b^{n-2}}{b^n+b^{n-1}+\dots+b+1}\right).$$

Este suficient să demonstrăm:

$$\frac{a^{n-1}+a^{n-2}}{a^n+a^{n-1}+\dots+a+1} - \frac{b^{n-1}+b^{n-2}}{b^n+b^{n-1}+\dots+b+1} \geqslant 0$$

Avem: $(a^{n-1}+a^{n-2})(b^n+b^{n-1}+\dots+b+1)-$

$-(b^{n-1}+b^{n-2})(a^n+a^{n-1}+\dots+a+1)=$

$=a^{n-2}b^n-a^n\cdot b^{n-2}+a^{n-1}b^n-a^n b^{n-1}+a^{n-2}b^{n-3}-$

$-a^{n-3}b^{n-2}+a^{n-1}b^{n-3}-a^{n-3}b^{n-1}+$

$+a^{n-2}b^{n-4}-a^{n-4}b^{n-2}+\dots+a^{n-2}-b^{n-2}+$

$+a^{n-1}b^{n-4}-a^{n-4}b^{n-1}+\dots+a^{n-1}-b^{n-1}=$

$=a^{n-3}\cdot b^{n-3}(a^2-b^2)(1-ab)+a^{n-3}\cdot b^{n-3}(a-b)(1-a^2b^2)+$

$+a^{n-4}\cdot b^{n-4}(a^2-b^2)+\dots+a^{n-2}-b^{n-2}+$

$+a^{n-4}\cdot b^{n-4}(a^3-b^3)+\dots+a^{n-1}-b^{n-1}\geq 0$

deoarece: $a\geq 1\geq b>0$ și $0<ab\leq 1$

Inegalitatea de la punctul b) este demonstrată

Folosind inegalitatea de la punctul b) și inegalitatea Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$(a^n+b^n)^2\geq(a^n+b^n)(a^{n-2}+b^{n-2})\geq$

$\geq\left(\sqrt{a^n\cdot a^{n-2}}+\sqrt{b^n\cdot b^{n-2}}\right)^2=(a^{n-1}+b^{n-1})^2\Rightarrow$

$\Rightarrow a^n+b^n\geq a^{n-1}+b^{n-1}$