Problema săptămânii 280

Se poate partiţiona mulţimea numerelor întregi în trei submulţimi disjuncte două câte două astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, numerele n, $n-50$ şi $n+2020$ să aparţină la trei submulţimi diferite?

Concursul Arany Dăniel, 2020

Soluţie: Răspunsul este negativ.
Notând cu $P(n)$ proprietatea ca $n, n-50, n+2020$ aparţin la trei submulţimi diferite, scriem pentru un n arbitrar proprietăţile $P(n)$, $P(n-50)$ şi $P(n+2020)$. Atunci nicicare două dintre numerele $n+2020$, $n-50$ şi $n+1970$ nu pot face parte din aceeaşi submulţime. Comparând asta cu $P(n)$ deducem că n şi $n+1970$ fac parte din aceeaşi submulţime, şi asta pentru orice n. Atunci din $P(n-50)$ rezultă că numerele n, $n-50$ şi $n-100$ aparţin, pentru orice n, la trei submulţimi diferite. Comparând cu $P(n)$, deducem că $n-100$ şi $n+2020$ aparţin aceleiaşi submulţimi (pentru orice n), deci n şi $n+2120$ aparţin aceleiaşi submulţimi. Aşadar, n, $n+1970$ şi $n+2120$ aparţin aceleiaşi submulţimi, deci în general n şi $n+150$ aparţin aceleiaşi submulţimi. Deducem că $n+1970$, n, $n+150$, $n+2\cdot 150$, $\ldots$, $n+13\cdot 150 = n+1950$ aparţin aceleiaşi submulţimi. Rezultă că n şi $n+20$ aparţin aceleiaşi submulţimi. Dar atunci $n, n+20, n+2\cdot 20, \ldots, n+101\cdot 20 = n+2020$ aparţin aceleiaşi submulţimi, ceea ce contrazice $P(n)$.

Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu, Andrei Pană, David Ghibu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 280

Is it possible to partition the set of the integer numbers into three pairwise disjoint subsets such that, for any integer n, the numbers n, $n-50$ and $n+2020$ belong to three different subsets?

Arany Dániel Contest, 2020

Solution: The answer is in the negative.
Detone by $P(n)$ the fact that $n, n-50, n+2020$ belong to three different subsets. From $P(n)$, $P(n-50)$ and $P(n+2020)$ it follows that no two of the numbers $n+2020$, $n-50$, $n+1970$ belong to the same subset. Comparing this with $P(n)$, we deduce that n and $n+1970$ belong to the same subset, and this for all n. Writing this also for $n-50$ instead of n, we get that $n-50$, $n-100$ and $n-150$ belong to different subsets, therefore n and $n-150$ belong to the same subset. But then $n+1970$, n, $n+150$, $n+2\cdot 150$, $n+13\cdot 150 = n+1950$ belong to the same subset. It follows that n and $n+20$ belong to the same subset. But then $n, n+20, n+2\cdot 20, \ldots, n+101\cdot 20 = n+2020$ belong to the same subset, which is a contradiction.