Problema săptămânii 279

Fie α şi β două numere reale diferite, nu ambele întregi. Arătaţi că există un număr natural n astfel încât $\alpha^n - \beta^n$ să nu fie întreg.

KöMaL, 2014

Soluţie: (oficială din revista *KöMaL*)
Presupunem prin absurd că $\alpha^n - \beta^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ obţinem $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha^2 - \beta^2 \in \mathbb{Z}$, de unde $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$. Combinat cu $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$, rezultă $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$, cu $(x, y, z) = 1$ astfel încât $\alpha = \frac{x}{z}$, $\beta = \frac{y}{z}$ (putem aduce α, β la numitor comun). Din $\alpha^n - \beta^n \in \mathbb{Z}$ rezultă $z^n \mid x^n - y^n$, şi asta pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie p un divizor prim al lui z. (Există, deoarece $z = 1$ sau $z = -1$ ar implica $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, ceea ce contrazice enunţul.) Cum $p \mid x - y$, avem $x \equiv y \pmod{p}$. Dar p^n divide z^n, deci şi pe $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$. Dacă $x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, atunci $x \equiv y \pmod{p}$ implică $nx^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, $\forall n \geq 2$. Alegând n nedivizibil cu p, ar rezultă $p \mid x$ şi $p \mid y$, ceea ce ar contrazice $(x, y, z) = 1$. Aşadar, dacă n nu e divizibil cu p atunci $p^n \mid x^n - y^n$ implică $p^n \mid x - y$. Deoarece există numere naturale n nedivizibile cu p oricât de mari, obţinem o contradicţie.

Remarcă: Partea finală se putea rescrie ca aplicaţie directă a **Lifting the Exponent Lemma** (LTE). Dacă $p \mid z$ şi $z \mid x - y$, atunci $p \mid x - y$ şi, alegând n nedivizibil cu p, avem $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$ (valabil şi pentru $p = 2$). Pe de altă parte, $p^n \mid x^n - y^n$ implică $v_p(x^n - y^n) \geq n$. Dar nu putem avea $v_p(x - y) \geq n$ pentru orice n nedivizibil cu p.

Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu, Andrei Pană, Emanuel Mazăre* şi *David Ghibu.*

Problem of the week no. 279

Let α and β be two different real numbers such that at least one of them is not an integer. Prove that there exists a positive integer n such that $\alpha^n - \beta^n$ is not an integer.

KöMaL, 2014

Solution: (official solution from *KöMaL*)
Assume that $\alpha^n - \beta^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ and $n = 2$ we obtain $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ and $\alpha^2 - \beta^2 \in \mathbb{Z}$, which lead to $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$. Combining with $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$, we get $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Let $x, y, z \in \mathbb{Z}$, with $(x, y, z) = 1$ such that $\alpha = \frac{x}{z}$, $\beta = \frac{y}{z}$ (we can bring α, β to a common denominator). From $\alpha^n - \beta^n \in \mathbb{Z}$ it follows that $z^n \mid x^n - y^n$, for all $n \in \mathbb{N}$. Let p a prime divisor of z. (It has one because $z = 1$ or $z = -1$ would lead to $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, which contradicts the statement of the problem.) As $p \mid x - y$, we have $x \equiv y$

(mod p). But p^n divides z^n, hence also $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$. If $x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, then $x \equiv y \pmod{p}$ means that $nx^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, $\forall\, n \geq 2$. Taking n co-prime with p, we get $p \mid x$ and $p \mid y$, which contradicts $(x, y, z) = 1$. Thus, if n is co-prime with p, then $p^n \mid x^n - y^n$ leads to $p^n \mid x - y$. But there are positive integers n, co-prime with p, that are arbitrarily large, therefore the last condition leads to a contradiction.

Remark: The last part of the proof can be rewritten as a direct consequence of the **Lifting the Exponent Lemma** (LTE). If $p \mid z$ şi $z \mid x - y$, then $p \mid x - y$ and picking n co-prime with p, we get $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$ (valid also for $p = 2$). On the other hand, $p^n \mid x^n - y^n$ leads to $v_p(x^n - y^n) \geq n$. But we cannot have $v_p(x - y) \geq n$ for all n co-prime with p.