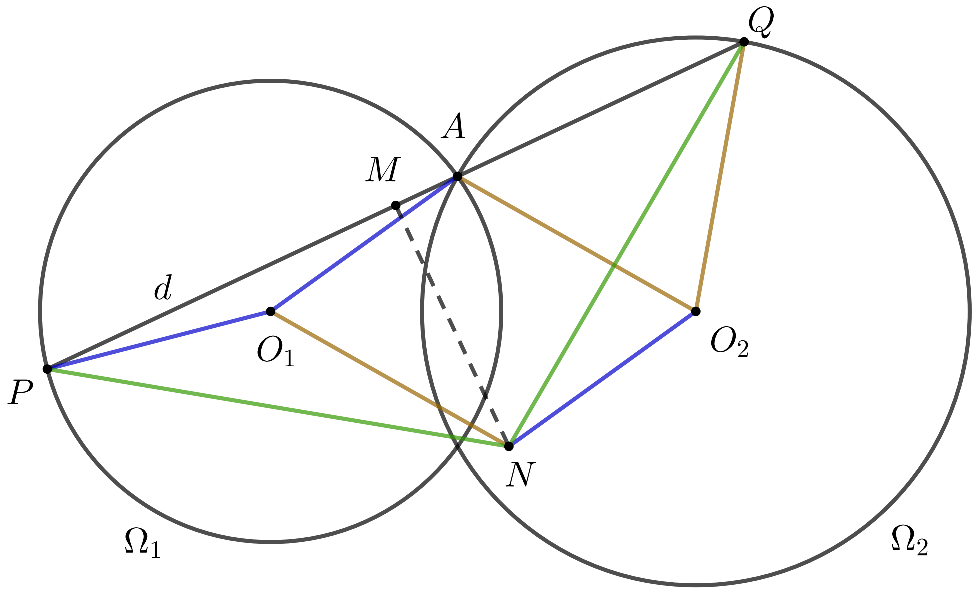
Problema săptămânii 277

Fie Ω_1 şi Ω_2 două cercuri secante. Notăm cu A unul dintre punctele lor de intersecţie. Fie d o dreaptă oarecare care trece prin A. Notăm cu P şi Q intersecţiile, diferite de A, ale dreptei d cu cele două cercuri. Arătaţi că există un punct independent de dreapta d aleasă şi care aparţine mediatoarei segmentului $[PQ]$.

Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri. Notăm $\alpha = m(\sphericalangle O_1AO_2)$ (mărime fixă), $x = m(\sphericalangle PAO_1)$ (mărime variabilă).
Notăm cu M mijlocul segmentului $[PQ]$. Punctul căutat trebuie să fie legat de punctele fixe A, O_1, O_2. Un asemenea punct N ar putea fi al patrulea vârf al unui paralelogram care are trei vârfuri în punctele A, O_1, O_2. Rămâne de arătat că acest punct N aparține mediatoarei segmentului $[PQ]$. Triunghiurile AO_1P și AO_2Q sunt isoscele. Deducem că $m(\sphericalangle QAO_2) = 180° - \alpha - x$, $m(\sphericalangle AO_1P) = 180° - 2x$, $m(\sphericalangle AO_1N) = m(\sphericalangle AO_2N) = 180° - \alpha$, $m(\sphericalangle AO_1P) + m(\sphericalangle AO_1N) = 360° - 2x - \alpha$, $m(\sphericalangle AO_2Q) + m(\sphericalangle AO_2N) = 180° - 2(180° - \alpha - x) + 180° - \alpha = 2x + \alpha$. Deoarece $\big(m(\sphericalangle AO_1P)+m(\sphericalangle AO_1N)\big)+\big(m(\sphericalangle AO_2Q)+m(\sphericalangle AO_2N)\big) = 360°$, una dintre sumele $m(\sphericalangle AO_1P) + m(\sphericalangle AO_1N)$ şi $m(\sphericalangle AO_2Q) + m(\sphericalangle AO_2N)$ este mai mică, iar cealaltă este mai mare decât $180°$ (dacă ambele sume sunt egale cu $180°$, atunci punctele P, O_1, N, respectiv Q, O_2, N sunt coliniare, și avem $PN = QN$).
Rezultă acum ușor că triunghiurile PO_1N și QO_2N sunt congruente (LUL), deci $PN = QN$ și punctul fix N este situat pe mediatoarea segmentului $[PQ]$.



Remarca 1: (*Radu Stoleriu*)
Dacă M, M_1 şi M_2 sunt proiecţiile punctelor N, O_1, respectiv O_2 pe PQ, se arată uşor că $M_1M = AM_2$, deci M este mijlocul lui $[PQ]$.
Remarca 2: (*David Ghibu*)
Dacă tangentele în A la Ω_1 şi $|omega_2$ intersectează din nou Ω_2, respectiv Ω_1 în

punctele (fixe) X şi Y, atunci N poate fi descris ca fiind centrul cercului circumscris triunghiului AXY.

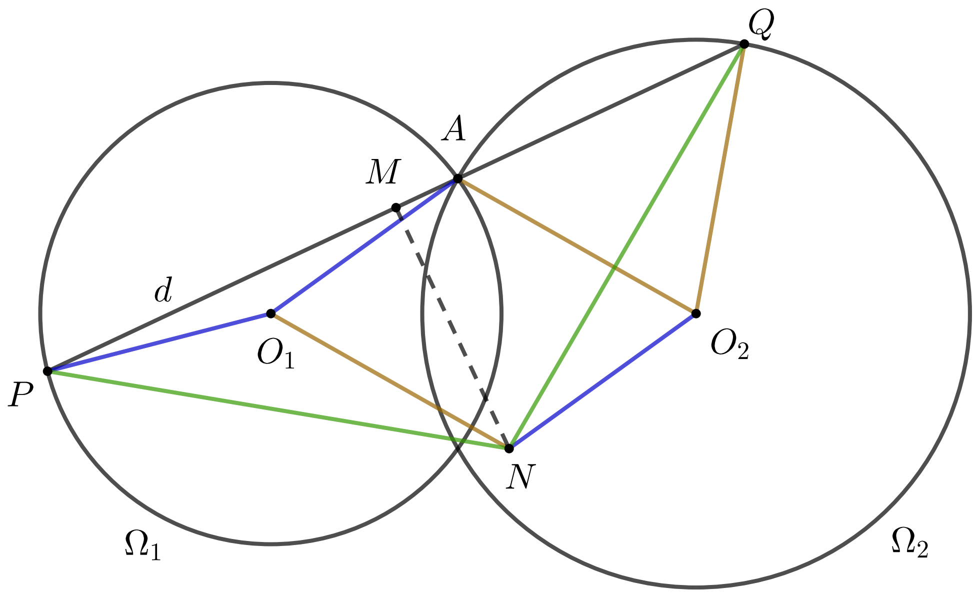
O a treia descriere a punctului N se găseşte separat, în soluţia domnului profesor *Miculiţa.*

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Emanuel Mazăre* şi *Andrei Pană.*

Problem of the week no. 277

Consider Ω_1 and Ω_2 two intersecting circles and let A be one of their intersection points. Let d be an arbitrary line passing through A. Line d intersects again the two circles at P and Q. Prove that there is a point, independent on the choice of the line d, that belongs to the perpendicular bisector of $[PQ]$.

Solution: (*Titu Zvonaru*)
Let O_1, O_2 be the centers of the two circles. Denote by $\alpha = \sphericalangle O_1AO_2$ (fixed), $x = \sphericalangle PAO_1$ (variable).
Let M be the midpoint of $[PQ]$. The point we are looking for must be somehow connected with the fixed points A, O_1, O_2. One such point could be the fourth vertex N of a parallelogram with three of its vertices at A, O_1, O_2. Take N such that AO_1NO_2 is a parallelogram. It remains to be proven that N belongs to the perpendicular bisector of $[PQ]$.
Triangles AO_1P and AO_2Q are isosceles. We deduce that $\sphericalangle QAO_2 = 180^\circ - \alpha - x$, $\sphericalangle AO_1P = 180^\circ - 2x$, $\sphericalangle AO_1N = \sphericalangle AO_2N = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle AO_1P + \sphericalangle AO_1N = 360^\circ - 2x - \alpha$, $\sphericalangle AO_2Q + \sphericalangle AO_2N = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha - x) + 180^\circ - \alpha = 2x + \alpha$. Since $(\sphericalangle AO_1P + \sphericalangle AO_1N) + (\sphericalangle AO_2Q + \sphericalangle AO_2N) = 360^\circ$, one of the sums $\sphericalangle AO_1P + \sphericalangle AO_1N$ and $\sphericalangle AO_2Q + \sphericalangle AO_2N$ is less than 180°, the other more than 180° (if both are equal to 180°, then point P, O_1, N and Q, O_2, N are collinear and we have $PN = QN$).
Now it follows easily that triangles PO_1N and QO_2N are equal (SAS), therefore $PN = QN$ and the fixed point N is situated on the perpendicular bisector of $[PQ]$.


Q
A
M
d
O_1
O_2
P
N
Ω_1
Ω_2