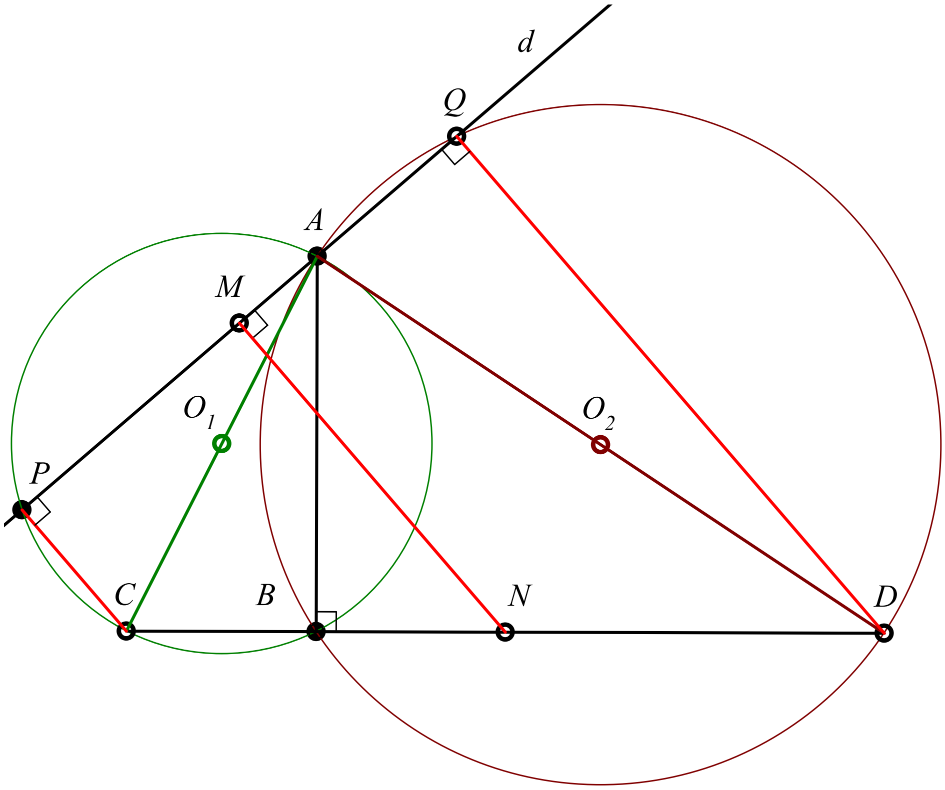
Problema săptămânii 277:

Fie Ω_1 şi Ω_2 două cercuri secante în punctele A şi B. Fie d o dreaptă oarecare care trece prin punctul A. Notăm cu P şi Q intersecţiile, cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei d cu cele două cercuri. Arătaţi că există un punct independent de dreapta d aleasă şi care aparţine mediatoarei segmentului $[PQ]$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând acum cu O_1 şi O_2 – centrele cercurilor date şi cu C şi D – punctele diametral opuse ale punctului A, faţă de cercurile Ω_1 şi Ω_2; iar cu N – mijlocul segmentului $[CD]$ (v.Fig.), voi arăta că **punctul fix N, se găseşte pe mediatoarea segmentului** $[PQ]$.

Într-adevăr, din:

$$\left.\begin{array}{l} B \in \odot[AC] = \Omega_1 \Rightarrow BC \perp AB \\ B \in \odot[AD] = \Omega_2 \Rightarrow BD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow B \in CD.$$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{l} P \in \odot[AC] \Rightarrow PC \perp AP = PQ \\ Q \in \odot[AD] \Rightarrow QD \perp AQ = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow PC, QD \perp PQ. \quad (1)$$

În fine, din relaţia (1), rezultă că patrulaterul $PCDQ$ – este un trapez dreptunghic şi notând acum cu M – mijlocul laturii (înălţimii) sale $[PQ] \Rightarrow$ linia sa mijlocie $[MN]$ – este mediatoarea laturii $[PQ]$. ■

OBSERVAŢIE: Locul geometric al mijlocului M – al segmentului $[PQ]$, când dreapta $d = PQ$ se roteşte în jurul punctului A, este cercul având drept diametru segmentul $[AN]$.