Problema săptămânii 276

Fie n un număr natural nenul şi $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathbb{N}^*$ greutăţi. Spunem că setul de greutăţi $g_1, g_2, \ldots, g_n$ este *perfect* dacă putem forma cu ele toate greutăţile $1, 2, \ldots, G$ unde $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Demonstraţi că dacă îndepărtăm cea mai mare greutate dintr-un set perfect, obţinem tot un set perfect.

Olimpiadă Iran, 2013

Soluţie: Fie $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n$ un set perfect de greutăţi. Pentru a putea obţine greutatea 1 trebuie să avem

$$g_1 = 1. \qquad (1)$$

În plus, trebuie ca

$$g_k \leq g_1 + g_2 + \ldots + g_{k-1} + 1,\ \forall\, k \geq 2, \qquad (2)$$

în caz contrar greutatea din membrul drept neputând fi obţinută. Demonstrăm prin inducţie după j afirmaţia

,,Orice set $g_1, g_2, \ldots, g_j$ cu proprietăţile (1) şi (2) formează un set perfect."

Pentru $j = 1$ afirmaţia rezultă din $g_1 = 1$. Dacă $g_1, g_2, \ldots, g_j, g_{j+1}$ are proprietăţile de mai sus, din ipoteza de inducţie rezultă că putem obţine oricare din greutăţile $1, 2, 3, \ldots, g_1 + \ldots + g_j$ folosind numai greutăţile $g_1, \ldots, g_j$. Atunci folosind şi greutatea g_{j+1} putem obţine orice greutate de la g_{j+1} la $g_1 + g_2 + \ldots + g_j + g_{j+1}$. Din proprietatea (2) rezultă că greutăţile $1, 2, 3, \ldots, g_1 + \ldots + g_j$ împreună cu cele de la g_{j+1} la $g_1+g_2+\ldots+g_j+g_{j+1}$ acoperă toate greutăţile de la 1 la $g_1+g_2+\ldots+g_j+g_{j+1}$, deci că $g_1, g_2, \ldots, g_j, g_{j+1}$ este un set perfect. Deoarece greutăţile $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ au proprietăţile (1) şi (2) şi deoarece acestea implicau faptul că mulţimea este perfectă, rezultă concluzia.

Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 276

Let n be a positive integer and positive integers $w_1, w_2, \ldots, w_n$ called "weights". We call a system of weights "*perfect*" if by taking some of the given weights, possibly all of them, one can obtain any total weight from 1 to $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Prove that, if we remove the largest weight from a perfect set of weights, we obtain a new set of weights that is also perfect.

Iran Olympiad, second round, 2013

Solution: Let $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n$ be a perfect set of weights. In order to obtain the weight 1, we need to have

$$g_1 = 1. \qquad (1)$$

Moreover, we need

$$g_k \leq g_1 + g_2 + \ldots + g_{k-1} + 1, \ \forall\, k \geq 2, \qquad (2)$$

otherwise the weight on the right hand side can not be obtained. We prove by induction after j the statement

"Any set $g_1, g_2, \ldots, g_j$ satisfying properties (1) and (2) is a perfect set."

For $j = 1$ the statement follows from $g_1 = 1$. If $g_1, g_2, \ldots, g_j, g_{j+1}$ has the proprerties above, from the inductive hypothesis it follows that we can obtain each of the weights $1, 2, 3, \ldots, g_1 + \ldots + g_j$ using only $g_1, \ldots, g_j$. Then, by also using weight g_{j+1}, we can also obtain every total from g_{j+1} until $g_1 + g_2 + \ldots + g_j + g_{j+1}$. From property (2) it follows that the total weight from $1, 2, 3, \ldots, g_1 + \ldots + g_j$ together with the ones from g_{j+1} la $g_1 + g_2 + \ldots + g_j + g_{j+1}$ cover all the total weights from 1 until $g_1 + g_2 + \ldots + g_j + g_{j+1}$, i.e. $g_1, g_2, \ldots, g_j, g_{j+1}$ is a perfect set.
Since weights $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ do satisfy properties (1) and (2), the conclusion follows.

Other solutions can be found on AoPS.