**Problema săptămânii 275**

Fie $n > 1$ un număr întreg impar. Demonstraţi că ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{n}$ are soluţie $x, y \in \mathbb{N}^*$ dacă şi numai dacă $n$ are un divizor prim de forma $4k + 3$.

*Concursul Kürschák*, 1980

**Soluţie:**
Fie $(x, y)$ o soluţie şi $d = (x, y)$. Atunci $x = dx_1$, $y = dy_1$ cu $(x_1, y_1) = 1$ şi $4dx_1y_1 = n(x_1 + y_1)$. Cum $n$ este impar, $4 \mid x_1 + y_1$, deci $x_1 = 4j + 1$, $y_1 = 4s - 1$ sau invers. Dar $x_1$ şi $y_1$ îl divid pe $n$, deci $n$ are un divizor de forma $4k + 3$, prin urmare şi un divizor prim de această formă.

Reciproc, dacă $p = 4j - 1$ este un divizor al lui $n$, atunci $n = pm$ şi $\dfrac{4}{n} = \dfrac{4j}{nj} = \dfrac{p+1}{pmj} = \dfrac{1}{mj} + \dfrac{1}{pmj}$, deci $(mj, pmj)$ este soluţie.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Corneliu Mănescu-Avram, Andrei Pană, Emanuel Mazăre* şi *Ştefan Gobej.*

**Problem of the week no. 275**

Let $n > 1$ be an odd integer. Prove that the equation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{n}$ has solutions with $x, y$ positive integers if and only if $n$ has a prime divisor of the form $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.

*Kürschák Math Competition*, 1980

**Solution:**
Let $(x, y)$ be a solution and $d = gcd(x, y)$. Then $x = dx_1$, $y = dy_1$ with $gcd(x_1, y_1) = 1$ and $4dx_1y_1 = n(x_1 + y_1)$. As $n$ is odd, $4 \mid x_1 + y_1$, and we must have $x_1 = 4j + 1$, $y_1 = 4s - 1$ or the other way around. But $x_1$ and $y_1$ are divisors of $n$, so $n$ has some divisor of the form $4k + 3$, therefore also a prime divisor of that form.

Conversely, if $p = 4j - 1$ is a divisor of $n$, then $n = pm$ and $\dfrac{4}{n} = \dfrac{4j}{nj} = \dfrac{p+1}{pmj} = \dfrac{1}{mj} + \dfrac{1}{pmj}$, which shows that $(mj, pmj)$ is a solution.