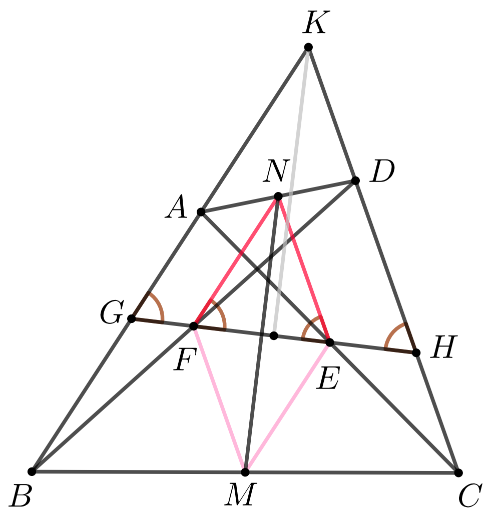
Problema săptămânii 273

Fie $ABCD$ un patrulater convex în care AB şi CD nu sunt paralele şi $AB = CD$. Fie E şi F mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Dacă dreapta EF intersectează segmentele $[AB]$ şi $[CD]$ în G, respectiv H, demonstraţi că $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle DHG$.

MEMO, 2009

Soluţia 1:
Fie $\{K\} = AB \cap CD$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $A \in (BK)$. Considerăm mijlocul N al laturii (AD). Atunci (NF) şi (NE) sunt linii mijlocii în triunghiurile DAB, respectiv DAC, prin urmare $NF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = NE$.
Deducem că triunghiul NEF este isoscel, deci $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle NFE \equiv \sphericalangle NEF \equiv \sphericalangle DHG$.

Remarci:
1. Considerând şi mijlocul M al lui (BC), $MENF$ este în general paralelogram (unul din paralelogramele Varignon, iar în cazul de faţă este romb. Aşadar, $MN \perp EF$.
2. Problema se poate rezolva şi aplicând de mai multe ori teorema lui Menelaos, demonstrând pe parcurs următoarea proprietate interesantă: $AG = CH$ şi $BG = DH$.
Aceste egalităţi rezultă şi considerând H' simetrcul lui H faţă de E.
$AHCH'$ fiind paralelogram, avem $CH = AH' = AG$ (triunghiul AGH' este isoscel deoarece $\sphericalangle AGH' \equiv \sphericalangle AH'G$).
3. Triunghiul KGH fiind isoscel, bisectoarea unghiului $\sphericalangle GKH$ este şi înălţime, deci este perpendiculară pe EF. Conchidem că ea este paralelă cu MN.
Am obţinut astfel o demonstraţie simplă a teoremei bisectoarei glisante.



Tot o variantă a teoremei bisectoarei glisante poate justifica şi egalităţile $AG = CH$ şi $BG = DH$. Fiind dat un triunghi KGH şi $A \in GK \setminus [GK$, $C \in (HK$, dacă E şi X sunt mijloacele segmentelor (AC) şi (GH), atunci EX este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle GKH$ dacă şi numai dacă $HC = GA$.

Soluţia 2: (vectorială, la nivelul clasei a IX-a)
Deoarece E şi F sunt mijloacele segmentelor (AC), respectiv (DE), avem $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB})$. Folosind acest fapt, avem:
$\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle DHG \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle AGH) = \cos(\sphericalangle DHG) \overset{AB=CD}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow AB^2 = CD^2$, adevărat.

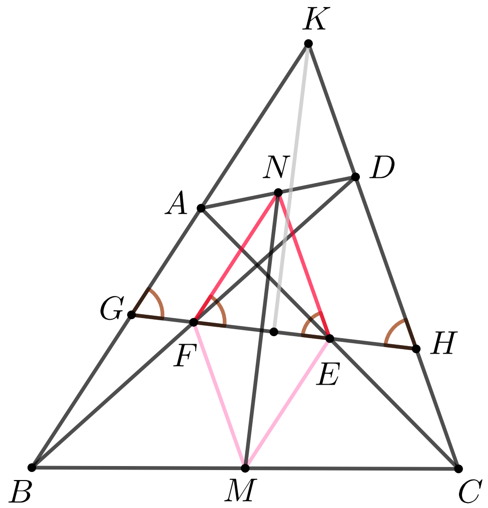
Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Andrei Pană, Radu Stoleriu, Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre* şi *Mihai Miculiţa*.

Problem of the week no. 273

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that AB and CD are not parallel and $AB = CD$. The midpoints of the diagonals AC and BD are E and F, respectively. The line EF meets segments AB and CD at G and H, respectively. Show that $\sphericalangle AGH = \sphericalangle DHG$.

MEMO, 2009

Solution 1:
Put $\{K\} = AB \cap CD$. WLOG we may consider that $A \in (BK)$. Let N be the midpoint of side AD. Then (NF) and (NE) are midlines in triangles DAB and DAC, respectively, therefore $NF = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = NE$.
We conclude that triangle NEF is isosceles, and thus $\sphericalangle AGH = \sphericalangle NFE = \sphericalangle NEF = \sphericalangle DHG$.



Solution 2: (based on dot product)
As E and F are the midpoint of line segments (AC) and (DE), we have

$\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB})$. Using this fact, we get:
$\sphericalangle AGH = \sphericalangle DHG \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle AGH) = \cos(\sphericalangle DHG) \overset{AB=CD}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow AB^2 = CD^2$, which is true.

Other solutions can be found on AoPS.