Problema I.3 (Olimpiada de Matematica din Europa Centrală, din 26 septembrie 2009):

Fie $ABCD$ – un patrulater convex în care: $AB \nparallel CD$ şi $[AB] \equiv [CD]$; iar E şi F – sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi respectiv $[BD]$. Notăm cu $\{G\} = EF \cap [AB]$ şi cu $\{H\} = EF \cap [CD]$ (v.Fig1). **Arătaţi că: $\widehat{AGH} \equiv \widehat{DHG}$.**

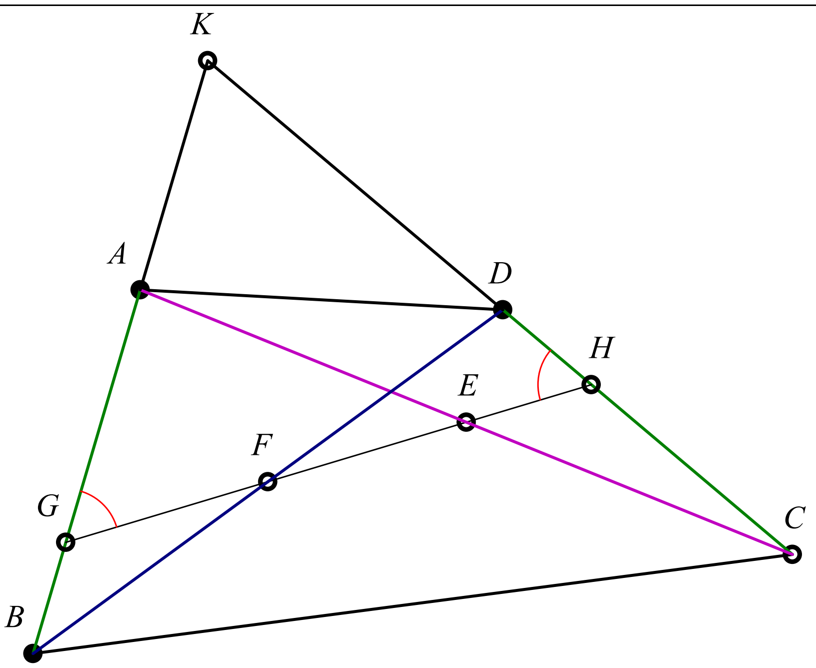

Fig.1.

SOLUŢIE (Mihai Miculiţa): Notând cu $\{K\} = AB \cap CD$ şi aplicând apoi teorema lui MENELAUS în triunghiul KAC la transversala $G-E-H$ şi apoi în triunghiul KBD, la transversala $G-F-H$, obţinem că:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{|GK|}{|GA|}\cdot\boxed{\dfrac{|EA|}{|EC|}}\cdot\dfrac{|HC|}{|HK|}=1\\[2ex] [EA]\equiv[EC]\Rightarrow\boxed{\dfrac{|EA|}{|EC|}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{|GK|}{|GA|}\cdot\dfrac{|HC|}{|HK|}=1\Rightarrow\dfrac{|GK|}{|KH|}=\dfrac{|GA|}{|HC|}\\[6ex] \left.\begin{array}{l}\dfrac{|GK|}{|GB|}\cdot\boxed{\dfrac{|FB|}{|FD|}}\cdot\dfrac{|HD|}{|HK|}=1\\[2ex] [FB]\equiv[FD]\Rightarrow\boxed{\dfrac{|EB|}{|ED|}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{|GK|}{|GB|}\cdot\dfrac{|HD|}{|HK|}=1\Rightarrow\dfrac{|GK|}{|KH|}=\dfrac{|GB|}{|HD|}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{|GK|}{|KH|}=\dfrac{|GA|}{|HC|}=\dfrac{|GB|}{|HD|}=$$

$$=\frac{|GA|+|GB|}{|HC|+|HD|}=\frac{|AB|}{|CD|}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{|GK|}{|KH|}=\dfrac{|AB|}{|CD|}\\[1ex] [AB]\equiv[CD]\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|GK|}{|KH|}=1\Leftrightarrow[GK]\equiv[HK]\Leftrightarrow\boxed{\widehat{AGH}\equiv\widehat{DHG}}.\ \blacksquare$$

OBSERVAŢIE:

Configuraţia problemei are şi proprietatea: $\dfrac{|GA|}{|HC|}=\dfrac{|GB|}{|HD|}=1\Leftrightarrow\begin{cases}[GA]\equiv[HC];\\ [GB]\equiv[HD].\end{cases}$

SOLUŢIA a II-a([1]): Notăm cu M şi $N-$mijloacele laturilor$[BC]$ şi respective $[AD]$; iar cu $\{P\}=[MN]\cap[EF]$ şi cu $Q-$piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{HKG}-$al ΔHKG, avem (v.Fig.2):

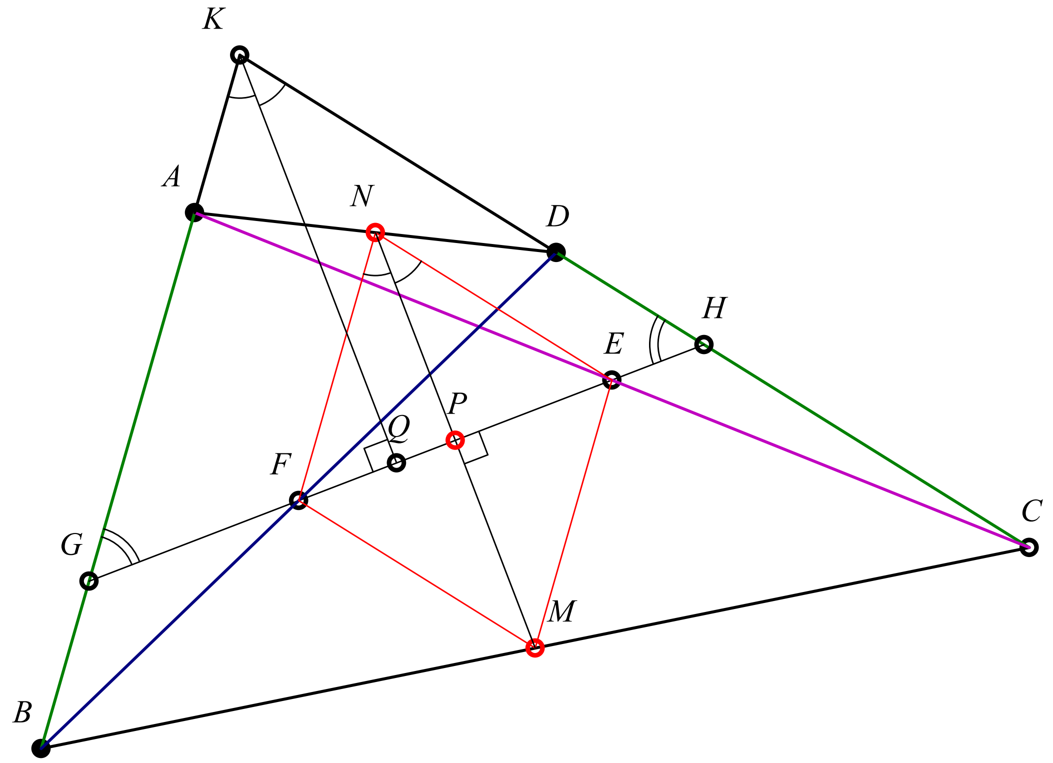

Fig.2.

$$\left.\begin{array}{l}[NA]\equiv[ND]\\ [FB]\equiv[FD]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}NF\parallel BK;\quad(1)\\ |NF|=\dfrac{|AB|}{2};\quad(2)\end{array}\right.\qquad \left.\begin{array}{l}[EA]\equiv[EC]\\ [MB]\equiv[MC]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}ME\parallel BK;\quad(3)\\ |ME|=\dfrac{|AB|}{2};\quad(4)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}[FB]\equiv[FD]\\ [MB]\equiv[MC]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}FM\parallel CK;\quad(5)\\ |FM|=\dfrac{|CD|}{2};\quad(6)\end{array}\right.\quad \text{şi}\quad \left.\begin{array}{l}[EA]\equiv[EC]\\ [NA]\equiv[ND]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}NE\parallel CK;\quad(7)\\ |NE|=\dfrac{|CD|}{2}.\quad(8)\end{array}\right.$$

Aşa că din, relaţiile:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}NF\parallel BK\ (1)\\ ME\parallel BK\ (3)\end{array}\right\}\Rightarrow NF\parallel ME\\ \left.\begin{array}{l}FM\parallel CK\ (5)\\ NE\parallel CK\ (7)\end{array}\right\}\Rightarrow FM\parallel NE\end{array}\right\}\Rightarrow MFNE-paralelogram;\quad(9)$$

iar din relaţiile (2) şi (7), ţinând seama de faptul că $[AB]\equiv[CD]\Rightarrow[NE]\equiv[NE];\quad(10)$

şi din relaţiile (9) şi (10)$\Rightarrow MFNE-romb\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(NM-este\ bisectoarea\ \widehat{ENF}\\ \qquad MN\perp EF.\quad(11)\end{array}\right.$

Pe de altă parte, relaţiile (2) şi (7) ne arată că unghiurile $\widehat{ENF}$ şi $\widehat{CKB}$, au laturile respective paralele, de unde rezultă că şi bisectoarele lor sunt paralele, deci: $MN\parallel KQ.\quad(12)$

Din relaţiile (11) şi (12), obţinem acum că: $KQ\perp EF\,(=HG)$; aşa că bisectoarea $KQ-$a unghiului $\widehat{GKH}$ este şi înălţime a $\Delta HKG\Rightarrow[KH]\equiv[KG]\Leftrightarrow\boxed{\widehat{HGA}\equiv\widehat{GHD}}$. ■

---

[1]) Faptul că patrulaterul $ABCD-$ din problema I.3 dată la MEMO din 2009 are şi proprietatea, că: $KQ\parallel HG$, mi-a fost semnalată de către **TITU ZVONARU**.