Problema săptămânii 272

Ana şi Bogdan joacă următorul joc. Mai întâi ei aleg un număr natural $n \geq 3$, apoi Ana se gândeşte la un număr din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bogdan trebuie să ghicească numărul. El va spune un număr, iar Ana îi va răspunde numai da sau nu. Dacă aAna a răspuns da, jocul se termină. Dacă răspunsul este nu, Ana va schimba numărul: ea poate fie să adune 1, fie sa scadă 1 din numărul ei, dar numărul trebuie să rămână cel puţin 1 (însă el poate deveni mai mare ca n). Apoi Bogdan poate încerca să ghicească noul număr. Procesul se repetă până când Bogdan ghiceşte numărul Anei.
Demonstraţi că Bogdan are o strategie care îi permite să ghicească numărul Anei din cel mult $3n - 5$ încercări.

J. Szoldatics, Revista KöMaL, septembrie 2021

Soluţie:
Strategia lui Bogdan este următoarea: el spune în ordine numerele $n-1, n-2, \ldots, 2$ (sunt $n-2$ încercări), apoi, în ordine, $2n-2, 2n-1, \ldots, 2$ (sunt alte $2n-3$ încercări). Vom demonstra că Bogdan nimereşte numărul Anei dintr-una din aceste $3n - 5$ încercări.
Distingem două cazuri:
• Dacă primul număr la care s-a gândit Ana are aceeaşi paritate ca şi $n - 1$, atunci la fiecare din primele $n - 2$ încercări Bogdan va spune mereu un număr de aceeaşi paritate cu numărul Anei. Arătăm că în acest caz Bogdan va ghici numărul Anei din primele $n-2$ încercări. Presupunem contrariul. Iniţial numărul $n-1$ spus de Bogdan este mai mare ca numărul Anei. Această proprietate (Bogdan spune un număr mai mare decât numărul Anei) se păstrează pe parcursul celor $n-2$ încercări: din motive de paritate, dacă Bogdan n-a ghicit, el a spus un număr care este cu cel puţin 2 mai mare decât cel al Anei. Diferenţa dintre numărul lui Bogdan şi cel al Anei scade cu cel mult 2, deci nu poate deveni negativă. Dar la sfârşit, când Bogdan spune 2, Ana nu mai poate avea un număr de aceeaşi paritate, mai mic ca 2, contradicţie. Aşadar, dacă Ana s-a gândit iniţial la un număr de aceeaşi paritate cu $n - 1$, Bogdan i-a ghicit numărul din primele $n - 2$ încercări.
• Dacă Ana s-a gândit la un număr având paritatea diferită de cea a lui $n-1$, arătăm că Bogdan va ghici numărul Anei din următoarele $2n - 3$ încercări. În primele $n - 2$ încercări, Bogdan şi Ana au avut mereu numere de parităţi diferite. Astfel, la finalul primelor $n - 2$ încercări, atunci când Bogdan a spus 2, Ana avea un număr impar. Când Bogdan a spus $2n - 2$, Ana avea un număr par. De aici înainte, Bogdan va spune mereu un număr care are aceeaşi paritate ca şi numărul Anei. Presupunem că el nu ghiceşte numărul Anei. După $n - 1$ încercări, numărul Anei este cel mult $n + (n - 1) = 2n - 1$. Pe de altă parte, am presupus că acesta este par, deci este cel mult $2n - 2$. Aşadar, la începutul acestei secvenţe de $2n - 3$ încercări, numărul spus de Bogdan, $2n - 2$, este mai mare sau egal decât cel al Anei. Presupunând că Bogdan nu ghiceşte din aceste $2n - 3$ încercări numărul Anei, numărul lui Bogdan va rămâne mereu strict mai mare ca numărul Anei, ceea ce la final nu este posibil: când Bogdan spune 2, Ana are trebui să aibă un număr par, dar mai mic decât 2,

ceea ce este imposibil.
În concluzie, aceste $3n-5$ încercări îi sunt suficiente lui Bogdan ca să ghicească numărul Anei.

Problema seamănă foarte mult cu următoarea, dată şi la ViitoriOlimpici în sezonul 2016-2017 (etapa 5, clasa a 7-a, problema 4):

O prinţesă locuieşte într-un apartament format din 17 camere dispuse într-un rând. Fiecare cameră are o uşă către exterior şi există câte o uşă între oricare două camere vecine. Prinţesa îşi petrece fiecare zi într-o cameră care este vecină cu camera în care şi-a petrecut ziua precedentă. Într-o zi, soseşte un prinţ dintr-o ţară îndepărtată, hotărât să cucerească prinţesa. Majordomul îi explică acestuia obiceiurile prinţesei şi îi comunică regulile pe care trebuie să le urmeze în încercarea de a o peţi pe prinţesă: În fiecare zi prinţul poate alege una din uşile exterioare şi bate la acea uşă. Dacă prinţesa este în respectiva cameră, ea îi va deschide uşa şi în cele din urmă se va căsători cu prinţul. Dacă prinţesa nu este în respectiva cameră, atunci nu se întâmplă nimic, iar prinţul va avea o nouă şansă a doua zi.
Din păcate, biletul de întoarcere al prinţului expiră după 30 de zile. Are prinţul suficient de mult timp la dispoziţie pentru a fi sigur că o poate cuceri pe prinţesă?

* * *

Soluţie:
30 de zile sunt suficiente. Numerotăm camerele de la 1 la 17. Strategia prinţului ar putea fi următoarea:
Prinţul bate în ordine la uşile camerelor: 2, 3, 4, ..., 16, apoi din nou 16, 15, ..., 2 (în ordine inversă sau nu). Cele 30 de zile s-au scurs. Să demonstrăm că prinţul a bătut la un moment dat la o uşă în spatele căreia se afla prinţesa.
Dacă iniţial prinţesa era într-o cameră cu număr par, atunci în primele 15 zile ea se află în cameră cu număr par atunci când prinţul bate la uşa unei camere cu număr par şi se află într-o cameră cu număr impar în zilele în care prinţul încearcă tocmai o astfel de cameră. Prin urmare, în acest caz, cei doi nu se pot petrece. Aşadar, în acest caz, dacă cei doi nu s-au întâlnit, înseamnă că prinţesa a rămas mereu într-o cameră cu număr mai mare decât cea încercată de prinţ şi de aceeaşi paritate, ceea ce după 15 zile nu mai este posibil, prinţul fiind la uşa camerei cu număr par cel mai mare. Aşa încât, dacă cei doi nu s-au întâlnit în primele 15 zile, rezultă că iniţial prinţesa a fost în cameră impară. Atunci în ziua a 16 ea va fi într-o cameră cu număr par şi putem relua strategia pe care am încercat-o în primele 15 zile. De astă dată însă, prinţul îşi va găsi prinţesa.

Analogia dintre cele două probleme este următoarea: Ana se gândeşte iniţial din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, apoi mereu la un număr vecin cu cel anterior. Bogdan încearcă să ghicească numărul curent al Anei. La fel, prinţesa se gândeşte la un număr (de cameră) din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 17\}$, apoi se mută mereu într-o cameră vecină (având un număr vecin). Prinţul joacă rolul lui Bogdan: el trebuie să ghicească numărul cemerei în care se găseşte prinţesa.

Diferenţa constă în faptul că la problema cu prinţesa, numărul camerei rămâne limitat la $n = 17$, în timp ce în problema săptămânii nu. Totuşi, rezolvarea este asemănătoare.

Am primit o singură soluţie corectă, de la *Emanuel Mazăre*.

Problem of the week no. 272

Al and Bill are playing the following game. They agree on a fixed number $n \geq 3$, and then Al thinks of a number from the set $\{1, 2, \dots, n\}$. Now Bill can guess the number. He will only get yes or no answers. If the answer is yes, the game terminates. If the answer is no, Al will change the number: he either increases or reduces it by 1, but the number must remain positive (it is allowed to go beyond n though). Then Bill can guess again, trying to hit the new number. The procedure is repeated until finally Bill gets the number. Prove that Bill has a strategy to end the game with at most $3n - 5$ guesses.

J. Szoldatics, KöMaL, 2021, problem B.5186

Solution:
Bill's strategy is the following one: first, he says, in order, the numbers $n-1, n-2, \dots, 2$ (there are, so far, $n-2$ guesses), then, again in order, the numbers $2n-2, 2n-1, \dots, 2$ (there are $2n-3$ more guesses). We prove that Bill will get Al's number in one of these $3n-5$ guesses.
We distinguish two cases:
• If Al's initial number has the same parity as $n-1$, then in each his first $n-2$ attempts, Bill will say a number that has the same parity as Al's. We prove that in this case Bill will guess Al's number from these first $n-2$ guesses. Assume the contrary to be true. Initially, the number $n-1$ said by Bill is larger than Al's number. This property (Bill says a number that is larger than Al's number) we be preserved along these $n-2$ attempts: for reasons of parity, if Bill did not guess, his number must have been at least by 2 larger than Al's number. The difference between his number and Al's cannot decrease by more than 2, therefore it cannot become negative. But at the end, when Bill says 2, Al cannot have a smaller number and yet have a number of the same parity. We conclude that, if Alş initial number had the same parity as $n-1$, then Bill has guessed his number from his first $n-2$ attempts.
• If Al's initial number has a different parity from $n-1$, we prove that Bill will guess Al's number the subsequent $2n-3$ guesses. In each of his first $n-2$ attempts, Bill says a number that has a different parity from Al's. Thus, at the end of the first $n-2$ attempts, when Bill said 2, Al had an odd number. When Bill said $2n-2$, Al had an even number. From that moment on, the two players will always say number of equal parity. Assume Bill's strategy fails to guess Al's number. After $n-1$ attempts,

Al's number is at most $n + (n-1) = 2n - 1$. On the other hand, we have assumed it was an even number, so it must be at must $2n - 2$. Thus, at the beginning of this sequence of $2n - 3$ attempts, Bill's number is larger than Al's. Assuming Bill doesn't hit Al's number, Bill will keep saying numbers that have the same parity as Al's number, but which are strictly larger. This cannot be true al the way until the end because when Bill says 2, Al cannot have a smaller even number.
In conclusion, these $3n - 5$ attempts are sufficient for Bill to guess Al's number.

The problem and its solution are very reminiscent of this problem.