Problema săptămânii 271

Fie n un număr natural nenul, iar p un număr prim. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere întregi care satisfac relaţiile

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

atunci $a = b = c$.

ShortList OIM, 2008

Soluţie: (a doua soluţie oficială)
Dacă două dintre a, b, c sunt egale, rezultă imediat că toate trei sunt egale. Presupunem, aşadar, că $a \neq b \neq c \neq a$. Prin scădere, egalităţile din enunţ se pot scrie $a^n - b^n = -p(b - c)$ şi analoagele. Prin înmulţire, obţinem

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} = -p^3. \qquad (1)$$

Dacă n este impar, diferenţele $a^n - b^n$ şi $a - b$ au acelaşi semn, deci produsul din membrul stâng al relaţiei (1) este pozitiv, în timp ce numărul din membrul drept este negativ. Deducem că n trebuie să fie număr par. Fie $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Să presupunem că p este impar. Atunci fiecare din factorii

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

trebuie să fie impar. Această sumă are $n = 2k$ termeni şi ea este impară dacă şi numai dacă a şi b au parităţi diferite. Însă printre numerele a, b, c există două de aceeaşi paritate, deci unul dintre factorii din membrul stâng al relaţiei (1) este par. Deducem că p este par. Aşadar, $p = 2$.
Relaţiile din enunţ ne arată în acest caz că a, b, c trebuie să aibă aceeaşi paritate. Împărţind relaţia (1) cu p^3, adică 2^3, putem scrie

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a^k - b^k}{a - b} \cdot \frac{b^k + c^k}{2} \cdot \frac{b^k - c^k}{b - c} \cdot \frac{c^k + a^k}{2} \cdot \frac{c^k - a^k}{c - a} = -1. \qquad (2)$$

Fiecare din cei şase factori, fiind număr întreg, trebuie să dividă -1, deci să fie ± 1. În particular, $a^k + b^k = \pm 2$. Dacă k ar fi par, ar rezulta $a^k + b^k = 2$, cu $a^k, b^k \in \mathbb{N}$, deci $a^k = b^k = 1$, ceea ce duce la $a^k - b^k = 0$ contrazicând (2).
Aşadar, k este impar. Atunci $a^k + b^k$ este divizibil cu $a + b$ şi, cum a şi b au aceeaşi paritate, deducem $a + b = \pm 2$. Analog, $b + c = \pm 2$, $c + a = \pm 2$. Din principiul cutiei, vor exista două sume egale, ceea ce va conduce la două variabile egale, contrazicând presupunerea iniţială.

Altă finalizare: (*David Ghibu*)
După ce se arată că $p = 2$ şi că a, b, c au aceeaşi paritate, din (1) rezultă că fiecare din cei trei factori din membrul stâng este ± 2. Dacă vreunul din factori ar fi 2, de exemplu primul, am avea $a^n - b^n = 2(a - b)$. Dar $a^n - b^n = p(c - b) = 2(c - b)$ şi ar rezulta că

$a = c$, contradicţie. Aşadar, toţi factorii trebuie să fie -2. Atunci $a^n - b^n = -2(a-b)$ şi analoagele, combinate cu relaţiile din enunţ dau $a - b = b - c = c - a$, de unde $a = b = c$, contradicţie.

Puteţi citi şi prima soluţie oficială, în engleză, aici, la pagina 44.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu* şi *Daniel Văcaru.*

Problem of the week no. 271

Let n be a positive integer and let p be a prime number. Prove that if a, b, c are integers (not necessarily positive) satisfying the equations

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

then $a = b = c$.

IMO ShortList, 2008

You can read the two official solutions here, on pages 44 and 45.