Problema săptămânii 270

Numerele reale a, b şi c satisfac relaţiile
$(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ şi $(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) = (abc)^9$.
Demonstraţi că cel puţin unul dintre numerele a, b şi c este egal cu 0.

Olimpiada de matematică pentru juniori, Macedonia de Nord, 2019

Soluţie:
Presupunem $abc \neq 0$. Avem

$$|a^9+b^9| \geq a^4b^4|a+b| \qquad (*)$$

şi analoagele. Inegalitatea precedentă este echivalentă cu $(a^9+b^9)^2 \geq a^8b^8(a+b)^2$, adică $a^{18}+b^{18} \geq a^8b^{10}+a^{10}b^8$ care se scrie $(a^8-b^8)(a^{10}-b^{10}) \geq 0$, inegalitate adevărată, cele două paranteze având acelaşi semn. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a^2 = b^2$. Scriind şi analoagele relaţiei $(*)$ şi înmulţind, obţinem

$$|(abc)^9| = |(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9)| \geq a^8b^8c^8|(a+b)(b+c)(c+a)| = |(abc)^9|,$$

deci trebuie să avem egalitate. Atunci fie trebuie ca fiecare din inegalităţile $(*)$ să fie satisfăcută cu egalitate, fie ca una din inegalităţi să se reducă la $0 \geq 0$. Aşadar, fie $a^2 = b^2 = c^2$, fie unul dintre factorii $a, b, c, a+b, b+c, c+a$ este 0. Al doilea caz implică oricum $abc = 0$ şi concluzia. Primul caz arată că avem fie $a = b = c$, fie două dintre numerele a, b, c sunt opuse, dar asta iarăşi implică $abc = 0$. Nu putem avea $a = b = c$ decât dacă $a = b = c = 0$. Aşadar este necesar ca unul dintre numere să fie 0 (iar atunci fie celelalte două sunt opuse, fie două dintre numere sunt 0 iar cel de-al treilea arbitrar).

Am primit soluţii corecte de la *David Ghibu* şi *Radu Stoleriu*.
Am mai primit două soluţii care prezentau o greşeală existentă şi în soluţia oficială, anume folosirea unei inegalităţi care este valabilă pentru $a, b, c > 0$ dar nu şi în general.

Problem of the week no. 270

Let the real numbers a, b, and c satisfy the equations
$(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ and $(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) = (abc)^9$.
Prove that at least one of a, b, and c equals 0.

JMMO, North Macedonia, 2019

Solution: Assume $abc \neq 0$. We have

$$|a^9+b^9| \geq a^4b^4|a+b| \qquad (*)$$

and its analogues. The previous inequality is equivalent with $(a^9+b^9)^2 \geq a^8b^8(a+b)^2$, i.e. with $a^{18}+b^{18} \geq a^8b^{10}+a^{10}b^8$ which can be written $(a^8-b^8)(a^{10}-b^{10}) \geq 0$. The last inequality is true, the two parentheses having the same sign. The equality holds if and only if $a^2 = b^2$. Writing the analogues of relation $(*)$ and multiplying them together, we obtain

$$|(abc)^9| = |(a^9 + b^9)(b^9 + c^9)(c^9 + a^9)| \geq a^8 b^8 c^8 |(a + b)(b + c)(c + a)| = |(abc)^9|,$$

which shows that we must have equality. This means that either we have equality in all three inequalities $(*)$, or ore of them reduces to $0 \geq 0$. Thus, we have either $a^2 = b^2 = c^2$, or one of the factors $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ is 0. The latter case leads anyway to $abc = 0$ and the conclusion. The first case shows that we have either $a = b = c$, or two of the numbers a, b, c are opposite, but this leads again to $abc = 0$. We can have $a = b = c$ only if $a = b = c = 0$. Thus, it is necessary that one of the numbers is 0. (It also follows that either the other two are opposite, or two of the numbers are 0 and the third one is arbitrary.)