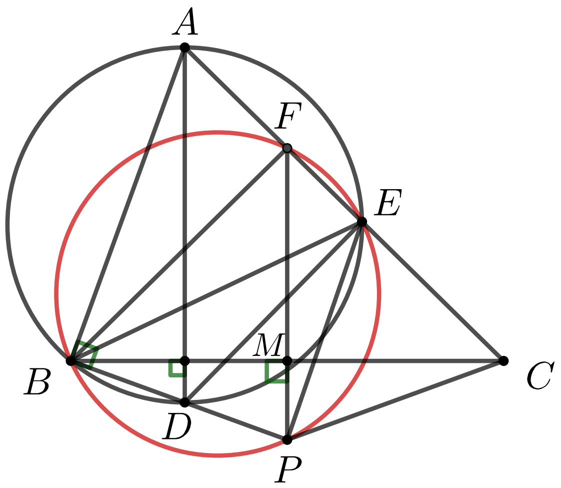
Problema săptămânii 269

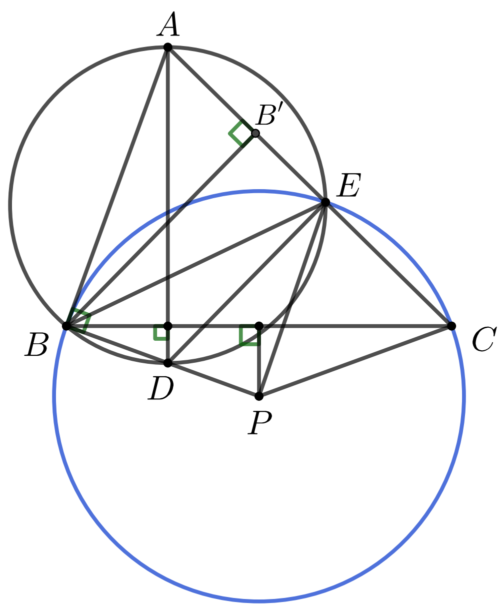
Fie ABC un triunghi şi ℓ perpendiculara în B pe AB. Perpendiculara din A pe BC intersectează ℓ în D, iar mediatoarea lui $[BC]$ intersectează ℓ în P. Fie E piciorul perpendicularei din D pe AC. Demonstraţi că triunghiul BPE este isoscel.

Olimpiadă Marea Britanie, runda a doua, 2019

Soluţia 1: (*Ştefan Gobej*)
Fie M şi F punctele în care mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează BC respectiv AC. Presupunem că $F \in (AE)$, celelalte cazuri fiind analoage. Atunci patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil şi $AD \parallel PF$, deci $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle FPB$, ceea ce arată că patrulaterul $BPEF$ este inscriptibil. Atunci avem $\sphericalangle PBE \equiv \sphericalangle PFE \equiv \sphericalangle PFB \equiv \sphericalangle PEB$, deci triunghiul BPE este isoscel, cu $PB = PE$.



Soluţia 2:
Patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ABC$, ceea ce arată că AB este tangentă la cercul circumscris triunghiului BCE. Cum ℓ este perpendiculara în B pe tangenta AB, centrul cercului circumscris triunghiului BCE se află pe dreapta ℓ. Acesta se află totodată pe mediatoarea laturii $[BC]$, deci este punctul P. Rezultă că $PB = PE$.

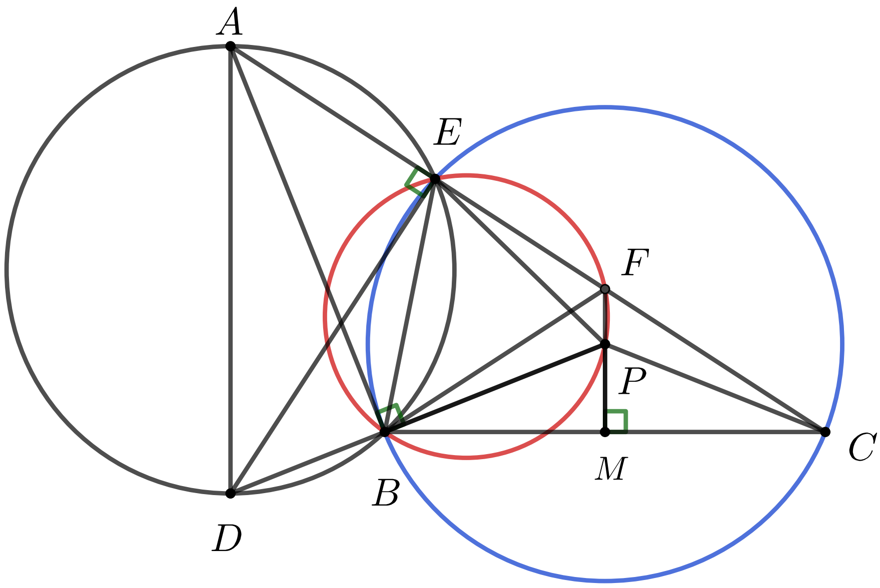


Soluţia 3: (*Titu Zvonaru*)
Notăm cu B' proiecția lui B pe AC. Deoarece patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil, avem $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ - m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ABC)$. Rezultă că $m(\sphericalangle B'BE) = 90^\circ - m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle CBP)$. Deducem că în triunghiul EBC dreptele BB' și BP sunt izogonale. Cum izogonala înălțimii BB' trece prin centrul cercului circumscris, iar punctul P se află pe mediatoarea laturii BC, rezultă că punctul P este centrul cercului circumscris triunghiului EBC. Atunci $BP = PE$.

Soluţia 4: (*Titu Zvonaru*)
Fie M mijlocul laturii BC. Avem $m(\sphericalangle CBP) = 90° - m(\sphericalangle B)$. Din triunghiurile dreptunghice $BB'E$ și BPM obținem $\sin B = \dfrac{BB'}{BE} = \dfrac{BM}{BP}$.
Deoarece $m(\sphericalangle EBD) = m(\sphericalangle DAE) = 90° - m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle B'BM)$ și $\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{BE}{BB'}$, rezultă că triunghiurile $BB'M$ și BEP sunt asemenea. Cum $B'M$ este mediană în triunghiul dreptunghic $BB'C$, deducem că triunghiul $BB'M$ este isoscel, deci și triunghiul BEP este isoscel.

O altă idee care funcţionează este să exprimăm cu teorema sinusurilor BP şi BE în funcţie de BC, apoi să calculăm PE cu teorema cosinusului în triunghiul BPE şi să constatăm că $BP = PE$.

Remarcă: Argumentele din toate rezolvările de mai sus se modifică (dar rămân analoage) în cazul în care $m(\sphericalangle B) > 90°$ sau dacă $AB > AC$. Iată figura într-un asemenea caz:



Am primit soluţii de la: *Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre, Andrei Pană* şi *David Ghibu.*

Problem of the week no. 269

Let ABC be a triangle. Let ℓ be the line through B perpendicular to AB. The perpendicular from A to BC meets ℓ at the point D. The perpendicular bisector of BC meets ℓ at the point P. Let E be the foot of the perpendicular from D to AC. Prove that triangle BPE is isosceles.

British Mathematical Olympiad, round 2, 2019

A solution in English can be found here.