Problema săptămânii 268

Fie n un număr natural nenul. Numerele 1, 2, 3, $\dots$, $2n$ sunt scrise într-o ordine oarecare în $2n$ puncte ale unui cerc. Fiecărei coarde care uneşte două asemenea puncte i se asociază modulul diferenţei numerelor înscrise în capetele sale. Arătaţi că se pot alege n coarde care nu se intersectează nicicare două astfel încât suma valorilor asociate acestor coarde să fie n^2.

Olimpiadă Filipine, 2013

Soluţie:
Demonstrăm că numerele *mici*, adică, $1, 2, \dots, n$ pot fi împerecheate prin coarde care nu se intersectează cu numerele *mari*, $n+1$, $n+2$, $\dots$, $2n$.
Undeva pe cerc găsim un număr *mare* lângă unul *mic*. Le unim, după care ignorăm aceste puncte. Printre numerele rămase sunt $n-1$ numere *mari* şi $n-1$ numere *mici*. Din nou, vor exista printre ele două vecine, unul *mare*, celălalt *mic*. Le unim cu o coardă. Continuăm până când epuizăm numerele. (Coardele trasate anterior nu vor intersecta niciuna dintre cele trasate ulterior.) Deoarece fiecare coardă uneşte un număr *mare* cu unul *mic* suma numerelor asociate celor n coarde va fi suma numerelor *mari* minus suma numerelor *mici*, adică $[(n+1)+(n+2)+\dots+2n]-(1+2+\dots+n) = n^2$.

Remarcă: Afirmaţia din problemă rămâne adevărată şi dacă cerem ca punctele, în loc să se afle pe un cerc, sunt $2n$ puncte în plam, cu nicicare trei coliniare.

Demonstraţia este o aplicaţie clasică a principiului extremal. O variantă poate fi citită la Problema 8. Altă redactare:
dintre toate modurile în care putem uni prin segmente cele n puncte în care sunt scrise numerele mici (să le spunem puncte mici) cu câte un punct în care este scris un număr mare („punct mare") - sunt $n!$ moduri de a le uni, adică un număr finit - există (cel puţin) unul pentru care suma lungimilor segmentelor este minimă. Aceste n segmente nu se intersectează. Într-adevăr, dacă $[A_1N_1]$ şi $[A_2N_2]$ (cu A_1, A_2 puncte mici, N_1, N_2 puncte mari) s-ar intersecta într-un punct O, atunci $A_1N_1 + A_2N_2 = A_1O + ON_1 + A_2O + ON_2 = (A_1O + ON_2) + (A_2O + ON_1) > A_1N_2 + A_2N_1$, astfel că dacă înlocuim segmentele $[A_1N_1]$ şi $[A_2N_2]$ cu $[A_1N_2]$ şi $[A_2N_1]$, obţinem o grupare cu suma lungimilor mai mică, ceea ce contrazice minimalitatea alegerii segmentelor. Aşadar, alegerea minimală nu conţine segmente care să se taie.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre, David Ghibu* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 268

Let n be a positive integer. The numbers $1, 2, 3, \ldots, 2n$ are written in some order in $2n$ points of a circle. To each chord joining two of these points, a value is assigned equal to the absolute value of the difference between the numbers written at its endpoints. Show that one can choose n pairwise non-intersecting chords such that the sum of the values assigned to them is n^2.

Philippines Mathematical Olympiad, 2013

Solutiom:
We prove that we join the *small numbers*, i.e. $1, 2, \ldots, n$ with the *large numbers*, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$ by n non-intersecting chords.
Some place on the circle, there must by a small number neighboring a large one. We join these two, and we ignore them in what follows. Among the remaining numbers, there are $n-1$ small one and $n-1$ large ones. Again, there must be two neighboring ones on the circle. Join them and forget them. We continue the process until all the small numbers are joined by non-intersecting chord with large numbers. As each small number is joined with a large number, the sum of the numbers written on the chords is the sum of the large numbers minus the sum of the small ones, i.e. $[(n+1)+(n+2)+\ldots+2n]-(1+2+\ldots+n)=n^2$.

Remark: The result remains true if, instead of being concyclic, we ask only for any three points to be non-collinear. A classical proof has been posted by Calvin Lin here.