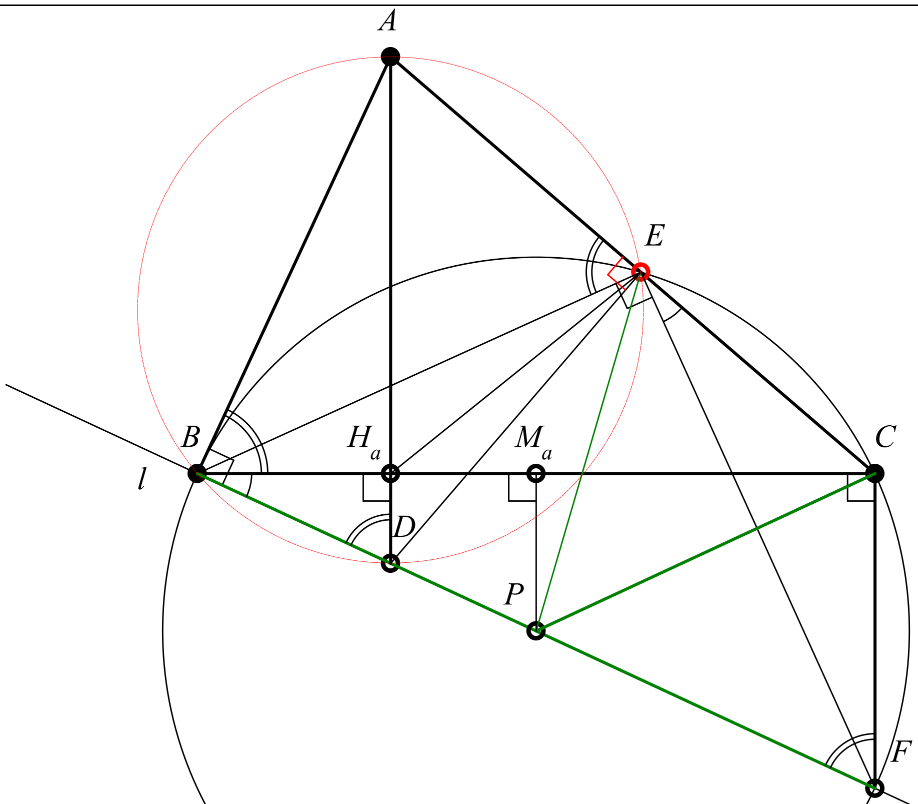
ONM din ANGLIA, runda a 2-a (din 24 ianuarie 2019)

Problema 1: **Fie $ABC -$ un triunghi oarecare şi $l -$ perpendiculara dusă prin vârful B, pe latura $[AB]$. Notăm cu B şi $P -$ punctele de intersecţie ale dreptei l, cu dreapta suport a înălţimii $[AH_a]$ şi respectiv cu mediatoarea laturii $[BC]$; iar cu $E -$ proiecţia punctului D pe latura $[AC]$. Arătaţi că: $[PB] \equiv [PE]$.**



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $M_a -$ mijlocul laturii $[BC]$ şi cu $F -$ punctul de intersecţie al dreptei l cu perpendiculara dusă prin vârful C, pe latura $[BC]$, voi redefini puunctul $E -$ ca fiind cel de al doilea punct de intersecţie al laturii $[AC]$, cu cercul circumscris ΔCBF. Cum $\Delta CBF -$ este dreptunghic în C, din:

$$\left.\begin{array}{r}[M_aB] \equiv [M_aC] \\ PM_a \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{[PB]} \equiv [PC] \equiv [PF] \equiv \boxed{[PE]}.$$

Aşa că, punctul meu $E -$ are proprietatea din concluzia problemei.
Problema revine acum la a arăta că punctul $E -$ astfel redefinit, coincide cu punctul purtând acelaşi nume din ipoteza problemei. Pentru aceasta este însă suficient să arătăm doar că:

$$\boxed{DE \perp AC \Leftrightarrow E = pr_{AC}(D)}.$$

Avem:

$$BFCE - inscriptibil \Rightarrow \begin{cases} m\left(\widehat{FEB}\right) = m\left(\widehat{FCB}\right) = 90^0; & (1) \\ \widehat{FEB} \equiv \widehat{BFC}; & (2) \\ \widehat{CEF} \equiv \widehat{CBF}. & (3) \end{cases}$$

Ţinând acum seama de relaţiile (1), (2) şi (30, obţinem că:

$$m\left(\widehat{AEB}\right) = 180^0 - \left[m\left(\widehat{FEB}\right) + m\left(\widehat{CEF}\right)\right] = 180^0 - \left[90^0 + m\left(\widehat{CBF}\right)\right] = 90^0 - m\left(\widehat{CBF}\right) = m\left(\widehat{ABC}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{AEB} \equiv \widehat{ABC}. \quad (4)$$

Pe de altă parte, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{AEB} \equiv \underline{\widehat{ABC}}\ (4) \\ \left.\begin{array}{r} AD \perp BC \\ AB \perp BF(=l)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\widehat{ABC}} \equiv \widehat{ADB}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AEB} \equiv \widehat{ADB} \Rightarrow ABDE - inscriptibil \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{DEC}\right) = m\left(\widehat{ABD}\right) = 90^0 \Rightarrow DE \perp AC \Leftrightarrow \boxed{E = pr_{AC}(D)}. \blacksquare$$