PROBLEME DIVERSE

lecţie susţinută la lotul de 13 de Andrei ECKSTEIN

Bucureşti, 25 mai 2015

I. SUBSTITUŢIA TAIWANEZĂ

1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a \geq bc$, $b \geq ca$ şi $c \geq ab$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E = abc(a-bc)(b-ca)(c-ab)$.

Concurs China

II. NUMĂRUL DE INVERSIUNI:

2. There are 42 people in a row. They want to order themselves according to their height, so that the tallest one will stand in front. In one step, two people who are next to each other can switch position. At most, how many steps are necessary for them to order as they want?

Concursul Náboj, 2012

III. SIGNATURA PERMUTĂRII:

3. O lăcustă, un greiere şi un cosar stau într-un şanţ lung şi drept. Din când în când una din gângănii sare peste una din vecinele ei. Este posibil ca după efectuarea a 2015 salturi ordinea celor trei gângănii să fie aceeaşi cu cea de la început?

Concursul KöMaL

4. Într-un grup de n copii, fiecare având câte o minge, fiecare copil schimbă mingea cu fiecare din ceilalţi copii cel puţin o dată. Care este numărul minim de schimburi de mingi după care se poate ajunge ca fiecare copil să reintre în posesia propriei sale mingi dacă a) $n = 5$, b) $n = 6$?

ShL JBMO 2011

IV. MUTĂRI-ATOM:

5. We are given 2002 boxes with a few pebbles in each, and we are also given a large (inexhaustible) heap of pebbles. In each step, we are allowed to put one pebble into each of any set of k boxes. Is it possible to achieve that there are the same number of pebbles in every box if a) $k = 8$; b) $k = 9$?

Concursul KöMaL (sept 2002), pb B. 3565.

V. CÂTEVA INEGALITĂŢI

6. Fie $a, b, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstraţi că

a) $a^3 + b^3 + c^3 + 12 \geqslant 5(a+b+c)$

b) $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{2a}{b^2 + 2a + c^2} \leqslant \frac{3}{2}$.

Ştefan Tudose, RMT nr. 3/2014, pb. E.154 şi E.156

7. Positive numbers $a,\ b,\ c$ satisfy $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Prove the inequality

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

N. Alexandrov, Tuymaada 2014, Day 1, Problem 4 Juniors, Problem 3 Seniors

8. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^3+c^3}+\frac{b^2}{c^3+a^3}+\frac{c^2}{a^3+b^3}\geqslant\frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Marian Cucoaneş, RMT nr. 2/2015, pb OBJ.60.

VI. ACOPERIRE CONVEXĂ

9. Given 2015 points in the plane, show that if every four of them form a convex quadrilateral then the points are the vertices of a convex 2015-sided polygon.

Concursul KöMaL, mai 2015, pb B. 4714.; Mathematical Excalibur, vol. 12, no.3

10. Let A and B be finite disjoint sets of points in the plane such that any three distinct points in $A\cup B$ are not collinear. Assume that at least one of the sets A, B contains at least five points. Show that there exists a triangle all of whose vertices are contained in A or in B that does not contained in its interior any point from the other set.

1985 IMO Longlisted Problem

VII. CERCURI FOARTE MICI

11. Din punctul A, exterior cercului Γ, se duc tangentele $[AT]$ şi $[AT']$ la cercul Γ. Fie M,M' mijloacele segmentelor $[AT]$ şi $[AT']$, iar P un punct de pe dreapta MM'. Din P se duc tangentele PU, PV la Γ $(U,V\in\Gamma)$. UV intersectează MM' în Q. Arătaţi că triunghiul PAQ este dreptunghic.

test Franţa 2014

12. Fie ABC un triunghi scalen, fie I centrul cercului său înscris şi fie (ω) cercul său circumscris. Dreptele AI, BI, CI intersectează cercul (ω) a doua oară în punctele D, E, respectiv F. Dreptele prin I, paralele la laturile BC, CA, AB, intersectează dreptele EF, FD, respectiv DE, în punctele K, L, respectiv M. Demonstraţi că punctele K, L, M sunt coliniare.

BMO 2015, propusă de Theoklitos Paragyiou (Cipru)

VIII. CONFIGURAŢII DE PUNCTE PE UN CERC

13. At a party, one is called "timid" if he or she knows at most 3 other people. Prove that if everybody at the party has at least 3 timid acquaintances, then everybody is timid. How many participants may be there at the party in this case?

Concursul KöMaL, pb. Gy. 3214.

14. Consider n children in a playground, where $n \geqslant 2$. Every child has a colored hat, and every pair of children is joined by a colored ribbon. For every child, the color of each ribbon held is different, and also different from the colour of that child's hat. What is the minimum number of colors that needs to be used?

Concursul PAMO, 2009

I. SUBSTITUŢIA TAIWANEZĂ

1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a \geq bc$, $b \geq ca$ şi $c \geq ab$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E = abc(a - bc)(b - ca)(c - ab)$.

Concurs China

Soluţie: Fie $a = bcx$, $b = cay$, $c = abz$, unde $x, y, z \geq 1$. Atunci $abcxyz = 1$. Avem de aflat maximul expresiei $(abc)^3(x-1)(y-1)(z-1)$, adică $\frac{x-1}{x^3} \cdot \frac{y-1}{y^3} \cdot \frac{z-1}{z^3}$. Dar $x^3 + \frac{27}{8} + \frac{27}{8} \geq \frac{27x}{4}$ (AM-GM), de unde $\frac{x-1}{x^3} \leq \frac{4}{27}$, deci $\max E = \left(\frac{4}{27}\right)^3$, cu egalitate dacă $x = y = z = \frac{3}{2}$, adică $a = b = c = \frac{2}{3}$.

II. NUMĂRUL DE INVERSIUNI:

2. There are 42 people in a row. They want to order themselves according to their height, so that the tallest one will stand in front. In one step, two people who are next to each other can switch position. At most, how many steps are necessary for them to order as they want?

Concursul Náboj, 2012

Soluţie: Fie $n = 42$. Putem avea maxim $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ inversiuni, ceea ce se şi întâmplă dacă sunt aranjaţi la început în ordine inversă. Fiecare rocadă poate diminua cu cel mult 1 numărul inversiunilor.

III. SIGNATURA PERMUTĂRII:

3. O lăcustă, un greiere şi un cosar stau într-un şanţ lung şi drept. Din când în când una din gângănii sare peste una din vecinele ei. Este posibil ca după efectuarea a 2015 salturi ordinea celor trei gângănii să fie aceeaşi cu cea de la început?

Concursul KöMaL, pb B. 3296., septembrie 1999

Răspuns: nu, signatura permutării va fi -1.

4. Într-un grup de n copii, fiecare având câte o minge, fiecare copil schimbă mingea cu fiecare din ceilalţi copii cel puţin o dată. Care este numărul minim de schimburi de mingi după care se poate ajunge ca fiecare copil să reintre în posesia propriei sale mingi dacă a) $n = 5$, b) $n = 6$?

ShL JBMO 2011

Official solution: We will denote the people by $A, B, C, \ldots$ and their initial balls by the corresponding small letters. Thus the initial state is $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee(, Ff)$. A swap is denoted by the (capital) letters of the people involved.

a) Five people form 10 pairs, so at least 10 swaps are necessary.
In fact, 10 swaps are sufficient:
Swap AB, then BC, then CA; the state is now Aa, Bc, Cb, Dd, Ee.
Swap AD, then DE, then EA; the state is now Aa, Bc, Cb, De, Ed.
Swap BE, then CD; the state is now Aa, Bd, Ce, Db, Ec.
Swap BD, then CE; the state is now Aa, Bb, Cc, Dd, Ee.
All requirements are fulfilled now, so the answer is 10.
b) Six people form 15 pairs, so at least 15 swaps are necessary. We will prove that the final number of swaps must be even. Call a pair formed by a ball and a person *inverted* if letter of the ball lies after letter of the person in the alphabet. Let T be the number of *inverted* pairs; at the start we have $T = 0$. Each swap changes T by 1, so it changes the parity of T. Since in the end $T = 0$, the total number of swaps must be even. Hence, at least 16 swaps are necessary. In fact 16 swaps are sufficient:
Swap AB, then BC, then CA; the state is now Aa, Bc, Cb, Dd, Ee, Ff.
Swap AD, then DE, then EA; the state is now Aa, Bc, Cb, De, Ed, Ff.
Swap FB, then BE, then EF; the state is now Aa, Bd, Cb, De, Ec, Ff.
Swap FC, then CD, then DF; the state is now Aa, Bd, Ce, Db, Ec, Ff.
Swap BD, then CE, then twice AF, the state is now Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff.
All requirements are fulfilled now, so the answer is 16.

IV. MUTĂRI-ATOM:

5. We are given 2002 boxes with a few pebbles in each, and we are also given a large (inexhaustible) heap of pebbles. In each step, we are allowed to put one pebble into each of any set of k boxes. Is it possible to achieve that there are the same number of pebbles in every box if a) $k = 8$; b) $k = 9$?

Concursul KöMaL (sept 2002), pb B. 3565.

Răspuns: a) Nu întotdeauna. Dacă iniţial am în cutii un număr total impar, el va rămâne impar, deci nu putem avea număr egal în cele 2002 (par) cutii.
b) Da, pentru că $(2002, 9) = 1$. Repetând mutarea, pot adauga $n + 1$ jetoane la orice grămadă în vreme ce la celelalte adun n.
Soluţie: Punem câte 1 în mulţimile $\{1, ..., 9\}$, $\{10, ..., 18\}, ..., \{1990, ..., 1998\}$,
$\{1999, 2000, 2001, 2002, 1, ..., 5\}, \{6, ..., 14\}, ..., \{1985, ..., 1994\}, \{1995, ..., 2002, g\}$.
Astfel am plasat un jeton în plus în gramada g; pot repeta şi nivela grămezile.
Generalizare: $n = 2002$. Dacă $(n, k) = d \neq 1$, numărul total rămâne mereu la fel ca la început modulo d.
Dacă $d = 1$, numerele $n, 2n, ..., kn$ dau resturi diferite la împărţirea cu k, deci unul din ele, jn, va da rest $k - 1$. După ce pun pe j straturi (aşa cum mai sus am pus în două straturi), rămâne unul în plus.
SAU, sin identitatea lui *Bézout*, există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $ka - nb = 1$, adică există a şi b astfel ca după b straturi (de tipul celor două de mai sus) să rămână exact o cutie în plus, de unde să obţinem ,,mutarea-atom".

V. CÂTEVA INEGALITĂŢI

6. Fie $a, b, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstraţi că
a) $a^3 + b^3 + c^3 + 12 \geqslant 5(a + b + c)$
b) $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{2a}{b^2 + 2a + c^2} \leqslant \frac{3}{2}$.

Ştefan Tudose, RMT nr. 3/2014, pb. E.154 şi E.156

a) *Soluţia 1:* Din condiţiile $a, b, c > 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ rezultă $a, b, c \in (0, \sqrt{3}\,]$. Încercăm să găsim $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^3 + mx^2 + n \geqslant 5x$, $\forall\, x \in (0, \sqrt{3}\,]$ $(*)$ şi astfel ca, scriind relaţia $(*)$ pentru $x = a$, $x = b$, $x = c$ şi adunându-le să obţinem inegalitatea cerută. Observăm mai întâi că în inegalitatea cerută avem egalitate dacă $a = b = c = 1$, deci va trebui să avem egalitate şi în $(*)$ pentru $x = 1$, adică va trebui ca $1 + m + n = 5$, deci $m + n = 4$. Dar $(*) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + (m+1)x^2 - (m+1)x + (m-4)x - (m-4) + m - 4 + n \geqslant 0$, adică, folosind că $m + n = 4$, cu $(x - 1)[x^2 + (m + 1)x + (m - 4)] \geqslant 0$ $(**)$. Deoarece prima paranteză îşi schimbă semnul în $x = 1$, pentru ca ultima inegalitate să poată fi valabilă pentru orice $x \in (0, \sqrt{3}\,]$ trebuie ca şi cea de-a doua paranteză să îşi schimbe semnul în 1, adică $1^2 + (m + 1) \cdot 1 + m - 4 = 0$. Rezultă $m = 1$ şi deci $n = 3$. Inegalitatea $(**)$ revine atunci la $(x - 1)^2(x + 3) \geqslant 0$, adevărată pentru orice $x \in (0, \sqrt{3}\,]$. Am demonstrat aşadar că $x^3 + x^2 + 3 \geqslant 5x$, $\forall\, x \in (0, \sqrt{3}\,]$ (care iese şi direct din inegalitatea mediilor pentru numerele $x^3, x^2, 1, 1, 1$). Rezultă de aici că $a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2 + 9 \geqslant 5(a + b + c)$, de unde, folosind $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ rezultă concluzia. Egalitate avem numai pentru $a = b = c = 1$.

Soluţia 2: (*Alexandru Mihalcu*) Din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică rezultă că $\dfrac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = 1$, deci $a + b + c \leq 3$. Apoi, din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, $(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$, de unde $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$ (lucru care rezulta şi din inegalitatea dintre media pătratică şi cea cubică). Atunci $a^3 + b^3 + c^3 + 12 \geq 3 + 12 = 15 \geq 5(a + b + c)$.

b) Din condiţiile $a, b, c > 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ rezultă $a, b, c \in (0, \sqrt{3}\,]$. Încercăm să găsim $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem $\dfrac{2a}{b^2 + 2a + c^2} = \dfrac{2a}{2a + 3 - a^2} \leqslant ma^2 + n$, $\forall\, x \in (0, \sqrt{3}\,]$ $(*)$ care, adunată cu analoagele, să dea inegalitatea cerută. Observăm mai întâi că în inegalitatea cerută avem egalitate dacă $a = b = c = 1$, deci va trebui să avem egalitate şi în $(*)$ pentru $a = 1$, adică $m + n = \dfrac{1}{2}$. Inegalitatea $(*)$ se scrie echivalent $ma^4 - 2ma^3 + (n - 3m)a^2 + (2 - 2n)a - 3n \leqslant 0$, sau încă $ma^4 - ma^3 - ma^3 + ma^2 + (n - 4m)a^2 - (n - 4m)a + (2 - n - 4m)a - (2 - n - 4m) + (2 - 4n - 4m) \leqslant 0$, adică, folosind $m + n = \dfrac{1}{2}$, $(a - 1)[ma^3 - ma^2 + (n - 4m)a + 2 - n - 4m] \leqslant 0$. Deoarece prima paranteză îşi schimbă semnul în $a = 1$, pentru ca ultima inegalitate să poată fi valabilă pentru orice $a \in (0, \sqrt{3}\,]$ trebuie ca şi cea de-a doua paranteză să îşi schimbe semnul în 1, adică $m \cdot 1^3 - m \cdot 1^2 + (n - 4m) \cdot 1 + 2 - n - 4m = 0$,

ceea ce revine la $2-8m=0$. Rezultă $m=\dfrac{1}{4}$ şi $n=\dfrac{1}{4}$. În acest caz, $(*)\Leftrightarrow$ $(a-1)(a^3-a^2-3a+3)\leqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2-3)\leqslant 0$, adevărat $\forall\, a\in(0,\sqrt{3}\,]$.
Avem aşadar $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{2a}{b^2+2a+c^2}=\sum_{cyc}\frac{2a}{2a+3-a^2}\leqslant\sum_{cyc}\frac{a^2+1}{4}=\frac{3}{2}$.
Cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

7. Positive numbers $a,\ b,\ c$ satisfy $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Prove the inequality

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

N. Alexandrov, Tuymaada 2014, Day 1, Problem 4 Juniors, Problem 3 Seniors

Soluţia 1:
$\dfrac{1}{\sqrt{a^3+1}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}a^{3/4}}$. Notând $a=x^4$, ar fi suficient să arătăm că $\displaystyle\sum\frac{1}{x^3}\leq 3$ dacă $\displaystyle\sum\frac{1}{x^4}=3$. Avem $\dfrac{4}{x^3}\leq\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}+1$ (AM-GM), de unde concluzia.
Soluţia 2: The problem is equivalent to
Positive numbers $a,\ b,\ c$ satisfy $a+b+c=3$. Prove the inequality:

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c^3+1}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Se arată că $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^3+1}}\leq\dfrac{3a+1}{4\sqrt{2}}$.

8. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^3+c^3}+\frac{b^2}{c^3+a^3}+\frac{c^2}{a^3+b^3}\geqslant\frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Marian Cucoaneş, RMT nr. 2/2015, pb OBJ.60.

Schită de soluţie: Amplificăm fracţiile cu $a^2,\ b^2$, respectiv c^2, aplicăm Titu. Va fi suficient să arătăm că $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2}\geq\dfrac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}$.
După calcule, inegalitatea revine la $[6,0,0]+3[4,2,0]+2[2,2,2]\geq 3[3,3,0]+3[3,2,1]$. Ori, din inegalitatea lui Schur, $[3,0,0]+[1,1,1]\geq 2[2,1,0]$, rezultă pe de o parte, prin înmulţire cu abc că $[4,1,1]+[2,2,2]\geq 2[3,2,1]$, pe de altă parte, scriind-o pentru pătrate, $[6,0,0]+[2,2,2]\geq 2[4,2,0]$. Folosind şi $[4,2,0]\geq[4,1,1]\geq[3,3,0]\geq[3,2,1]$ (Muirhead), se obţine concluzia.

VI. ACOPERIRE CONVEXĂ

9. Given 2015 points in the plane, show that if every four of them form a convex quadrilateral then the points are the vertices of a convex 2015-sided polygon.

Concursul KöMaL, mai 2015, pb B. 4714.; Mathematical Excalibur, vol. 12, no.3

vezi Mathematical Excalibur

10. Let A and B be finite disjoint sets of points in the plane such that any three distinct points in $A \cup B$ are not collinear. Assume that at least one of the sets A, B contains at least five points. Show that there exists a triangle all of whose vertices are contained in A or in B that does not contained in its interior any point from the other set.

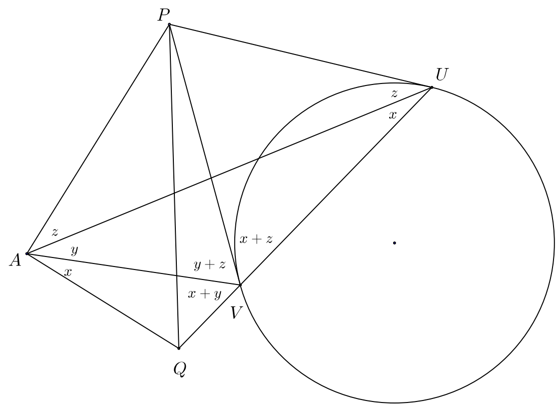
1985 IMO Longlisted Problem

vezi Mathematical Excalibur
VII. CERCURI FOARTE MICI

11. Din punctul A, exterior cercului Γ, se duc tangentele $[AT]$ şi $[AT']$ la cercul Γ. Fie M, M' mijloacele segmentelor $[AT]$ şi $[AT']$, iar P un punct de pe dreapta MM'. Din P se duc tangentele PU, PV la Γ ($U, V \in \Gamma$). UV intersectează MM' în Q. Arătaţi că triunghiul PAQ este dreptunghic.

test Franţa 2014

Soluţie: Dacă privim punctul A ca pe un cerc foarte mic, $[AT]$ şi $[AT']$ sunt tangentele comune, deci MM' este axa radicală. Prin urmare punctele P şi Q au aceeaşi putere faţă de cele două cercuri. Rezultă că $PA^2 = PU^2 = PV^2$ şi $QA^2 = QV \cdot QU$, deci triunghiurile PAU şi PUV sunt isoscele, iar triunghiurile QAV şi QUA sunt asemenea. Atunci, cu notaţiile din figură, $m(\angle QAV) = m(\angle QUA) = x$, $m(\angle QAU) = m(\angle QVA) = x + y$, $m(\angle PAU) = m(\angle PUA) = z$, $m(\angle PVU) = m(\angle PUV) = x + z$ şi $m(\angle PVA) = m(\angle PAV) = x + y$. Cum $180° = m(\angle QVA) + m(\angle AVP) + m(\angle PVU) = (x + y) + (y + z) + (z + x)$, rezultă $m(\angle PAQ) = x + y + z = 90°$.



12. Fie ABC un triunghi scalen, fie I centrul cercului său înscris şi fie (ω) cercul său circumscris. Dreptele AI, BI, CI intersectează cercul (ω) a doua oară în punctele D, E, respectiv F. Dreptele prin I, paralele la laturile BC, CA, AB, intersectează dreptele EF, FD, respectiv DE, în punctele K, L, respectiv M. Demonstraţi că punctele K, L, M sunt coliniare.

BMO 2015, propusă de Theoklitos Paragyiou (Cipru)

Solution (TelvCohl, AoPS): Since $\angle FEI \equiv \angle ICB \equiv \angle FIK$, it follows KI is tangent to the circle (EFI) at I, therefore $KI^2 = KE \cdot KF$, hence K lies on the radical axis ρ of the circle (ω) and the degenerate circle (I). Similarly we can prove $L \in \rho$ and $M \in \rho$, thus K, L, M are collinear on ρ. From this we also get $KLM = \rho \perp OI$, where O is the centre of (ω).

VIII. CONFIGURAŢII DE PUNCTE PE UN CERC

13. At a party, one is called "timid" if he or she knows at most 3 other people. Prove that if everybody at the party has at least 3 timid acquaintances, then everybody is timid. How many participants may be there at the party in this case?
Soluţie: Fiecare timid cunoaşte exact 3 timizi si niciun ne-timid. Timizii nu cunosc netimizi, deci nu există netimizi. Sunt cel putin 4 timizi. Fiecare timid cunoaşte 3, sunt $3n$ cunoştinte; dar ele sunt reciproce deci $3n$ =par, n =par. Pentru $n \geq 4$ par merge: îi dispunem în formă de poligon regulat şi fiecare îşi cunoaşte vecinii şi diametral opusul.

14. Consider n children in a playground, where $n \geqslant 2$. Every child has a colored hat, and every pair of children is joined by a colored ribbon. For every child, the color of each ribbon held is different, and also different from the colour of that child's hat. What is the minimum number of colors that needs to be used?

Concursul PAMO, 2009

Solution: (Dan Schwarz)
Clearly that number must be at least n, since each child's hat and the $n-1$ ribbons she holds must be of different colours. We will show a model exists using exactly n colours.
First tackle the case of n odd. Think of the children as being the vertices of a regular n-gon, with the ribbons being its $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ sides and diagonals. Label now the n-gon's vertices $1, 2, \ldots, n$, and label each side, and all diagonals parallel to it, with the label of the opposite vertex to that side. Each child will now hold ribbons of all colours but the one of her hat (and moreover, all children will wear hats of different colours, although this was not required).
For the case of n even, do the above for $n-1$ (since it's odd). Label each ribbon held by the n-th child by the label of the other child holding that ribbon. Lastly, relabel all children with label n. (It can be shown that we no more could fulfill the extra requirement that children also wear hats of different colours by using only n colours, but we could do it with $n+1$ colours.)