Problema săptămânii 266

Numerele reale a şi b satisfac relaţiile $a^3 = 3ab^2 + 2$ şi $b^3 = 3a^2b + 11$. Aflaţi $a^2 + b^2$.

baraj de juniori Macedonia, 2006?

Soluţie: Din relaţiile date rezultă $(a^3 - 3ab^2)^2 = 4$ şi $(b^3 - 3a^2b)^2 = 121$. Adunând aceste două relaţii obţinem $(a^3-3ab^2)^2+(b^3-3a^2b)^2 = 125$, adică $a^6-6a^4b^2+9a^2b^4+b^6-6a^2b^4+9a^4b^2 = 125$, deci $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 = 125$. Aşadar $(a^2+b^2)^3 = 125$, deci $a^2+b^2 = 5$.

Remarcă: Problema are obiect: există numere reale care satisfac simultan relaţiile date. De pildă, $a = 2$, $b = -1$. Mai sunt două alte perechi care verifică relaţiile: $a = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$.

Observaţie: Problema are în spate numere complexe: $(a+ib)^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$, deci relaţiile date ne spun cât sunt partea reală, respectiv imaginară, a lui $(a+bi)^3$. Din $(a+bi)^3 = 2-11i$ putem afla imediat modulul lui $a+bi$. Avem $|a+bi|^3 = |2-11i = \sqrt{2^2+(-11)^2} = 5\sqrt{5}$, deci $a^2+b^2 = |a+bi|^2 = 5$. Putem afla chiar a şi b observând că $z = 2-i$ satisface ecuaţia $z^3 = 2-11i$. Atunci celelalte două soluţii sunt $a+bi = (2-i)\varepsilon$ şi $a+bi = (2-i)\varepsilon^2$, unde ε satisface $\varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0$, adică $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Aşadar, cele trei perechi amintite mai sus sunt singurele soluţii ale problemei.

Altă cale directă de a afla a şi b: eliminând termenul liber din ecuaţiile date se obţine $11a^3 - 33ab^2 = 2b^3 - 6a^2b(= 22)$, deci $11a^3 + 6a^2b - 33ab^2 - 2b^3 = 0$. Cum $b = 0$ nu convine, putem împărţi prin b^3. Notând $\frac{a}{b} = t$, obţinem că t verifică ecuaţia de gradul III $11t^3+6t^2-33t-2 = 0$. Căutând eventuale soluţii întregi (printre divizorii termenului liber) se găseşte rapid soluţia $t = -2$, apoi celelalte două. Revenind la una din ecuaţiile din enunţ se află a, b şi apoi a^2+b^2. Pentru mai multe detalii, a se vedea soluţia domnului profesor Miculiţa.

Această problemă a apărut pe AoPS în 2006, cu menţiunea că ar fi fost dată la JMMO, Olimpiada Macedoniană de Matematică pentru Juniori, care joacă rolul de baraj de selecţie în Macedonia de Nord. Nu sunt sigur de an şi nu am găsit celelalte probleme date în 2006.

Am primit soluţii de la: *Corneliu Mănescu-Avram, Ştefan Gobej, Mihai Miculiţa, David Ghibu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 266

Reals numbers a and b are such that $a^3 = 3ab^2 + 2$ and $b^3 = 3a^2b + 11$. Find $a^2 + b^2$.

JMMO, Macedonia, 2006?

Solution: From the given equations we get $(a^3 - 3ab^2)^2 = 4$ şi $(b^3 - 3a^2b)^2 = 121$. Adding these two yields $(a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = 125$, i.e. $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 125$, hence $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$. We obtain $(a^2 + b^2)^3 = 125$, therefore $a^2 + b^2 = 5$.

Remark: There exist indeed real numbers a and b that satisfy the two relations, for example $a = 2$, $b = -1$. There are two other pairs that fulfill them: $a = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$.

Remark: Behind this problem hide complex numbers: we have $(a + ib)^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$, which means that the two equations in the statement of the problem give us the real part and the imaginary part of $(a+bi)^3$. From $(a+bi)^3 = 2 - 11i$ we can immediately find the modulus of $a + bi$. We have $|a + bi|^3 = |2 - 11i = \sqrt{2^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}$, hence $a^2 + b^2 = |a + bi|^2 = 5$. Actually, we can determine a and b noticing that $z = 2 - i$ satisfies the equation $z^3 = 2 - 11i$. Then the other two solutions are $a + bi = (2 - i)\varepsilon$ and $a + bi = (2 - i)\varepsilon^2$, where ε satisfies $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, i.e. $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. In conclusion, the three pairs listed at the previous remark are the only pairs of real numbers that satisfy the given equations.

This problem has been posted on AoPS in 2006, stating the source to be JMMO, the Junior Macedonian Mathematics Olympiad, which plays the role of junior team selection test in North Macedonia. I am not sure that the problem was actually given in 2006, nor could I find any other problems from 2006 (or before).