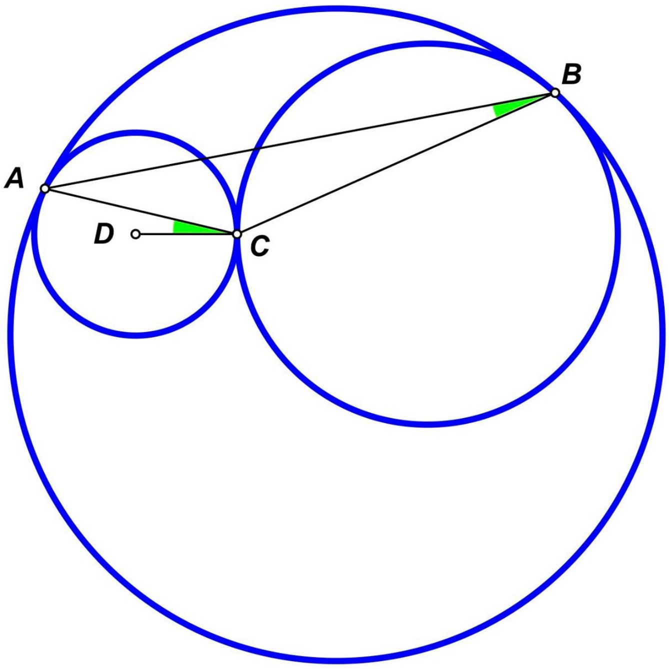
Problema săptămânii 265

Cercurile ω_1 şi ω_2 sunt tangente exterior în punctul C. Ele sunt tangente interior cu cercul Ω, punctele de tangenţă fiind A, respectiv B. Dacă D este centrul cercului ω_1, arătaţi că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACD$.

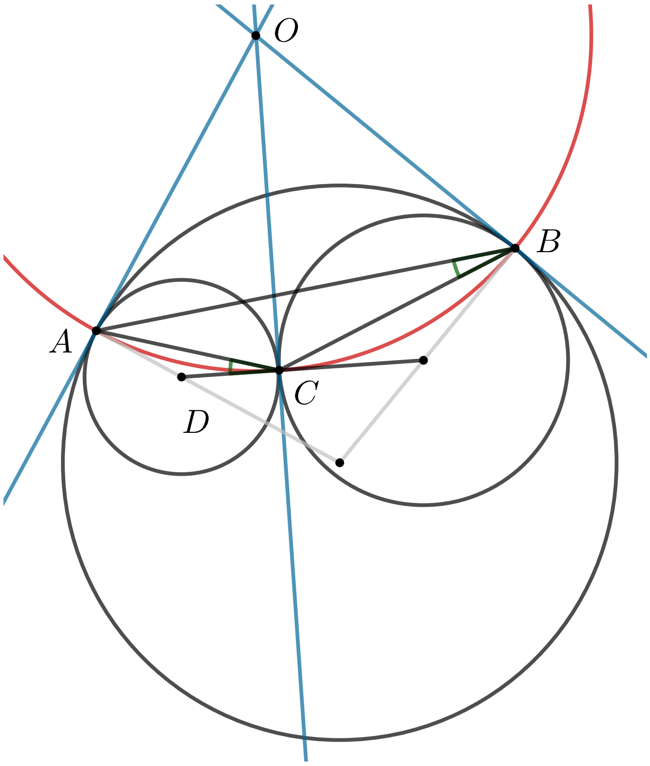
Stanley Rabinowitz

Problema a fost postată pe grupul *Romantics of Geometry.* Primele soluţii, cu tot cu figuri, sunt de asemenea preluate de pe respectivul site.

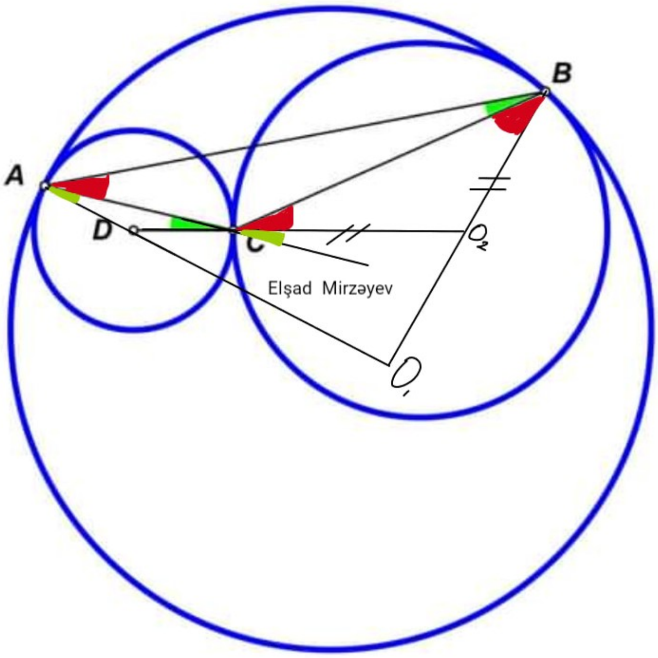


Dacă A, B, C sunt coliniare, atunci $[AB]$ este diametru în Ω şi $D \in AB$, astfel că unghiurile din concluzie sunt nule, deci egale. În continuare tratăm numai cazul în care punctele A şi B nu sunt diametral opuse.

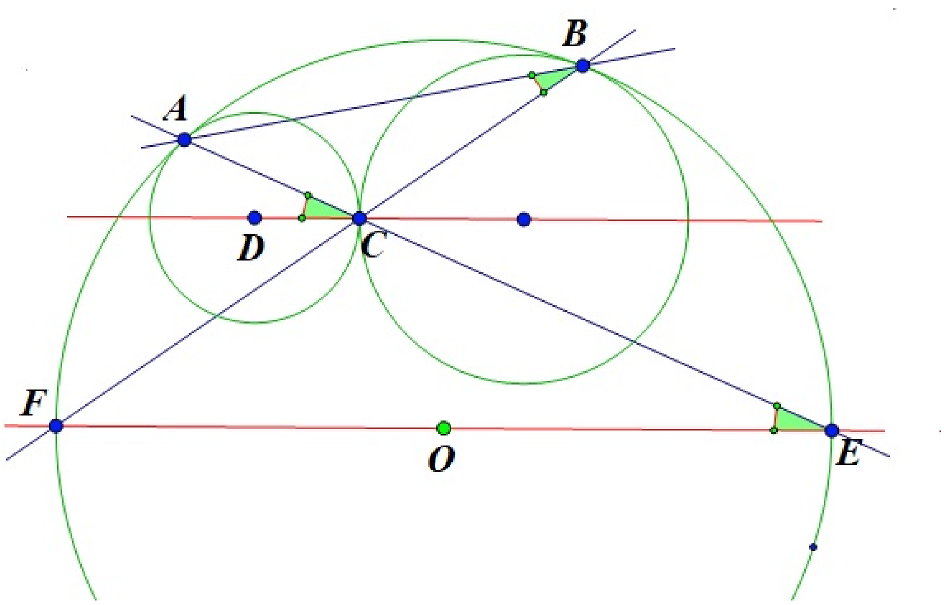
Soluţia 1: (*Waldemar Pompe*)
Considerăm axele radicale a câte două dintre cele trei cercuri. Acestea sunt tangentele comune în A, B şi C şi se intersectează în centrul radical al celor trei cercuri, O. Atunci $OA = OB = OC$, deci este este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dar $OC \perp OD$ arată că CD este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC, de unde concluzia. (Unghiurile $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ACD$ subîntind arcul AC al cercului circumscris triunghiului ABC.)



Soluţia 2: (*Elşad Mirzəyev*)
Fie O_1 şi O_2 centrele cercurilor Ω, respectiv ω_2. Atunci $C \in DO_2$ şi $O_1 \in AD \cap BO_2$. Notând $x = m(\sphericalangle DAC)$ şi $y = m(\sphericalangle CBO_2)$, avem $m(\sphericalangle DCA) = x$, $m(\sphericalangle O_2CB) = y$, $m(\sphericalangle O_1DO_2) = 2x$, $m(\sphericalangle DO_2O_1) = 2y$ şi $m(\sphericalangle DO_1O_2) = 180° - 2x - 2y$. Atunci din triunghiul isoscel O_1AB rezultă $m(\sphericalangle ABO_1) = x + y$, deci $m(\sphericalangle ABC) = x = m(\sphericalangle ACD)$.



Soluţia 3: (*Starick Yakoff*)
Vom aplica *Teorema lui Boutin*[1] care afirmă că dacă $AC \cap \Omega = \{A, E\}$ şi $BC \cap \Omega = \{B, C\}$, atunci E şi F sunt diametral opuse.
Într-adevăr, omotetia de centru A care duce cercul ω_1 în cercul Ω va duce tangenta comună interioară, d, a cercurilor ω_1 şi ω_2 în tangenta în E la Ω. Cele două tangente vor fi paralele. Similar, omotetia de centru B care transformă ω_2 în Ω va duce dreapta d în tangenta în F la Ω, şi ea paralelă cu d. Deducem că tangentele în E şi F la Ω sunt paralele, deci E şi F sunt diametral opuse.
Revenim la problemă. Omotetia de centru A amintită mai sus duce DC în OE, unde O este centrul cercului Ω. Atunci $DC \parallel OE$ şi $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle ABF$, de unde concluzia.

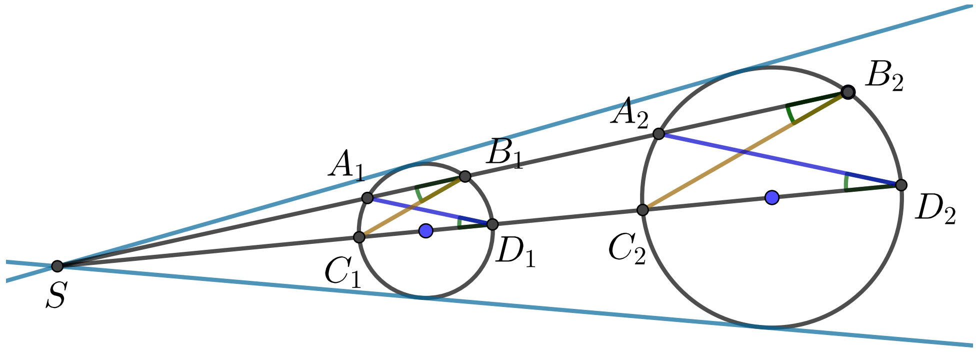


Remarci Dacă tangenta comună interioară cercurilor mici intersectează cercul mare în M şi N, se ştie că $(AC$ şi $(BC$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MAN$, respectiv $\sphericalangle MBN$. Cum aceste bisectoare se intersectează în $C \in MN$, patrulaterul $AMBN$ este armonic. Rezultă că C este centrul cercului înscris în triunghiul ABP, unde P este mijlocul lui $[MN]$.

De fapt, în problemă tangenţele nu sunt importante. Important este că dreptele AB şi CD trec prin centrul de omotetie directă care transformă ω_1 în ω_2.
Adică are loc:

Fie ω_1 şi ω_2 două cercuri, exterioare sau secante având centrele O_1 şi O_2 şi raze diferite. Fie S puncul de intersecţie a tangentelor comune exterioare. O dreaptă care trece prin S intersectează cercurile în A_1, B_1, respectiv A_2, B_2 astfel încât $B_1, A_2 \in (A_1B_2)$. Dacă $\{D_1\} = [O_1O_2] \cap \omega_1$ şi $\{C_2\} = [O_1O_2] \cap \omega_2$, atunci $\sphericalangle A_1B_2C_2 \equiv \sphericalangle A_1D_1O_1$.

[1] Afirmaţia teoremei rămâne valabilă şi dacă cele trei cercuri sunt tangente exterior două câte două.



Si aici se puteau lua două drepte oarecare care trec prin S, nu era nevoie ca una dintre drepte să fie linia centrelor.
Ce mai rămâne de demonstrat din problema iniţială este că dreapta determinată de cele două puncte de tangenţă, A şi B, trece prin S. Acest lucru rezultă din faptul că omotetia directă a cercurilor ω_1 şi ω_2 este compusa omotetiilor directe care duc ω_1 în Ω, respectiv Ω în ω_2, ori ambele omotetii lasă dreapta AB nemodificată. Aşadar, AB rămâne fixă la aplicarea omotetie directe dintre ω_1 şi ω_2, prin urmare trece prin centrul acesteia, S.

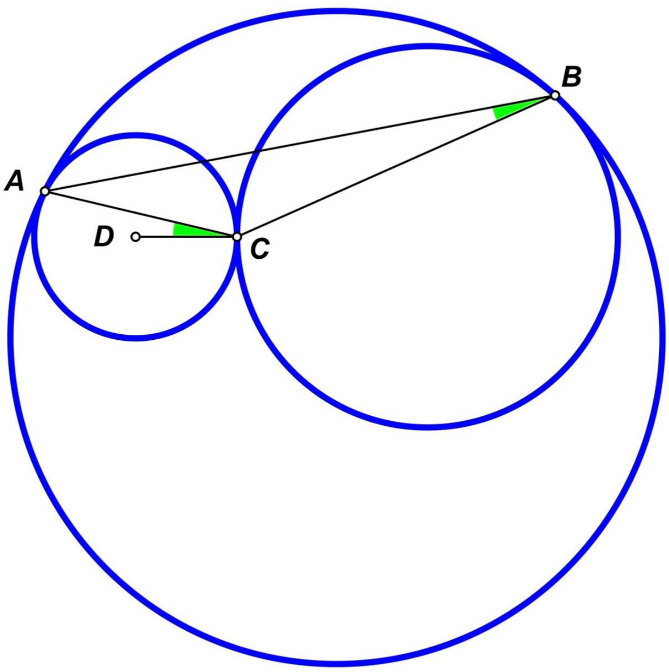
Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Andrei Pană, Emanuel Mazăre, Ovidiu Lazăr* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 265

Circles ω_1 and ω_2 are externally tangent at C. The two circles are internally tangent to the circle Ω, the touch points being A and B, respectively. If D is the center of ω_1, prove that $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$.

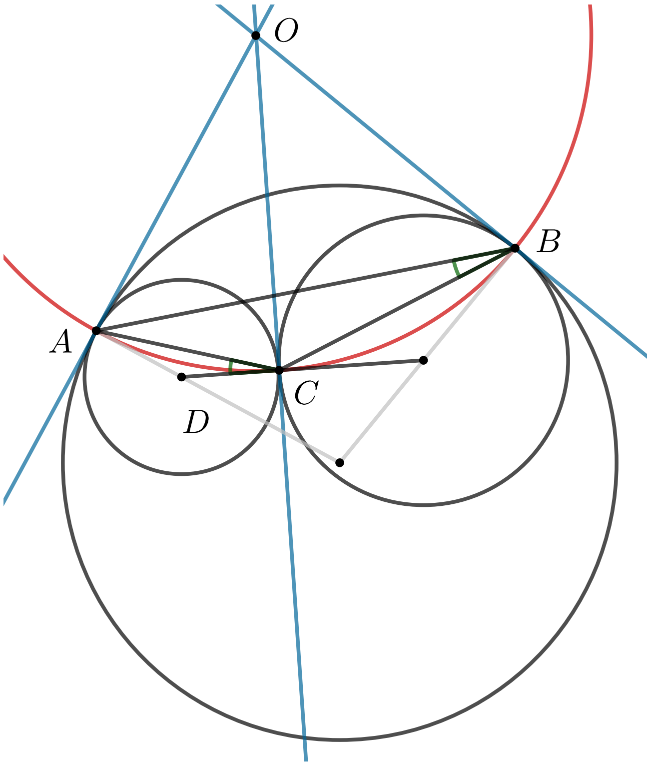
Stanley Rabinowitz

The problem has been posted on the facebook group *Romantics of Geometry*. The first solutions, together with the figures, are taken from there.

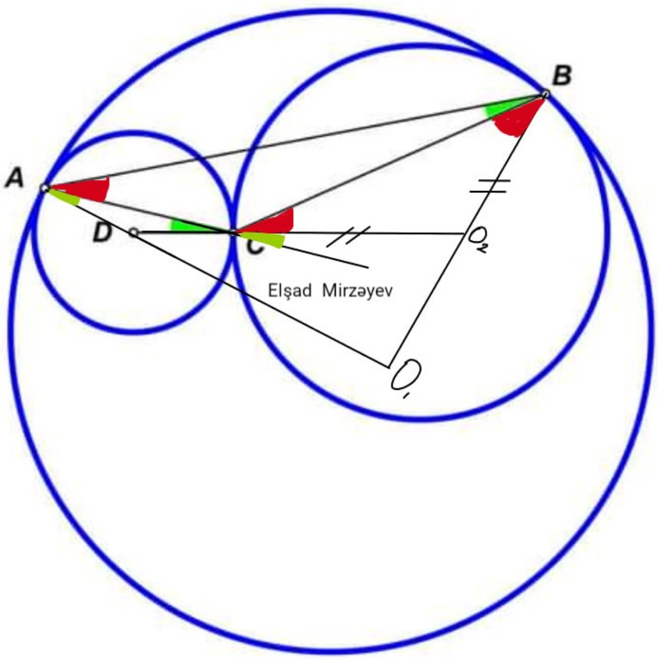


If A, B, C are collinear, then $[AB]$ is a diameter of Ω and $D \in AB$, therefore the two angles are zero angles and thus equal. In the sequel we consider A, B, C not to be collinear.

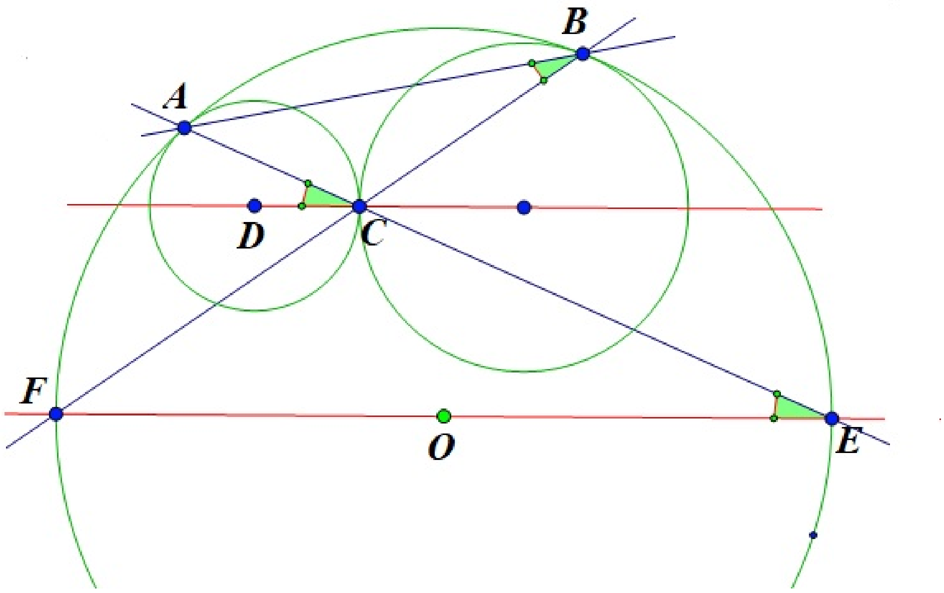
Solution 1: (*Waldemar Pompe*)
Consider the radical axis of the three circles. These are the common tangents to two of the circles draws at A, B and C and intersect at the radical center of the three circles, O. Then $OA = OB = OC$, i.e. O is the circumcenter of triangle ABC. But $OC \perp OD$ shows that CD is tangent to the circumcircle of ABC, hence the conclusion.



Solution 2: (*Elşad Mirzəyev*)
Let O_1 and O_2 be the centers of circles Ω and ω_2, respectively. Then $C \in DO_2$ and $O_1 \in AD \cap BO_2$. Denoting by $x = \sphericalangle DAC$ and $y = \sphericalangle CBO_2$, we have: $\sphericalangle DCA = x$, $\sphericalangle O_2CB = y$, $\sphericalangle O_1DO_2 = 2x$, $\sphericalangle DO_2O_1 = 2y$ and $\sphericalangle DO_1O_2 = 180° - 2x - 2y$. From the isosceles triangle O_1AB we get $\sphericalangle ABO_1 = x + y$, hence $\sphericalangle ABC = x = \sphericalangle ACD$.



Solution 3: (*Starick Yakoff*)
We use *Boutin's Theorem*[2] which states that if $AC \cap \Omega = \{A, E\}$ and $BC \cap \Omega = \{B, C\}$, then E and F are diametrically opposite.
Indeed, the homotety centered at A which transforms ω_1 into Ω maps the common internal tangent, d, of circles ω_1 and ω_2 into the tangent at E to circle Ω. The two tangent are parallel. Similarly, the homotety centesred at B that transforms ω_2 into Ω maps the line d into the tangent at F to Ω, which is also parallel to d. It follows that the tangents at E and F to Ω are parallel, i.e. E and F are diametrically opposite.
Let us retrun tu our problem. The aforementioned homotety centered at A maps DC into OE, where O is the center of circle Ω. Then $DC \parallel OE$ and $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AEF = \sphericalangle ABF$, which leads to the conclusion.



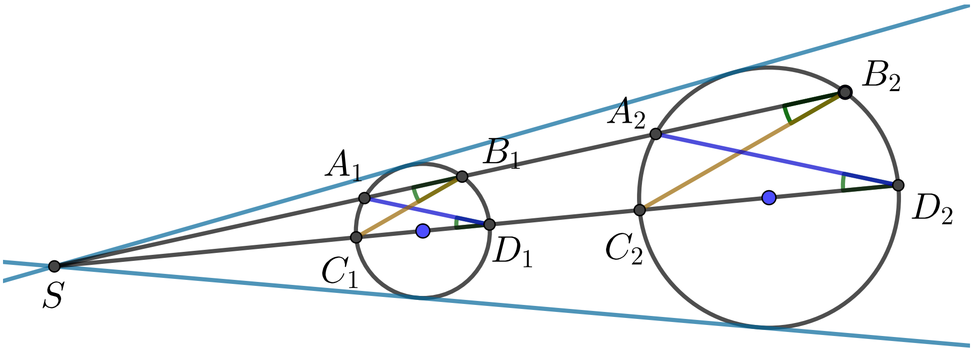
Remarks. If the common internal tangent to the small circles intersects the big circle at M and N, it is known that $(AC$ and $(BC$ are the bisectors of angles $\sphericalangle MAN$ and $\sphericalangle MBN$, respectively. These bisectors intersect at $C \in MN$, therefore the quadrilateral $AMBN$ is harmonic. It follows that C is the incenter of ABP, where P is the midpoint of $[MN]$.

Actually, the tangency conditions are not essential. Essential is the fact that lines AB and CD pass through the center of direct homotety that transformsă ω_1 into ω_2. The following, more general result, holds:

Let ω_1 and ω_2 be two circles, none contained in the interior of the other. Their cenetrs are O_1 and O_2 and their radii are not equal. Let S be the intersection point of their external common tangents. A line passing through S intersects the circles at

[2] whose statement remains true even if the three circles are two by two externally tangent to each other.

A_1, B_1 and A_2, B_2, respectively, such that $B_1, A_2 \in (A_1B_2)$. If $\{D_1\} = [O_1O_2] \cap \omega_1$ and $\{C_2\} = [O_1O_2] \cap \omega_2$, then $\sphericalangle A_1B_2C_2 = \sphericalangle A_1D_1O_1$.



More generally, the result remains true for any two lines passing through S (no need for one of them to be the center line of the two circles).
What still remains to be proven from the initial problem is the fact that the line determined by the two tangency points, A and B, passes through S. This follows from the fact that the direct homotety direct between ω_1 and ω_2 is the composite function of the direct homotety that transforms ω_1 into Ω, and the one that transforms Ω into ω_2. Both these homoteties leave the line AB unchanged. Thus, AB is invariant to the direct homotety transforming ω_1 into ω_2, which means that it passes through the center of the homotety, S.