Problema săptămânii 264

Ana şi Bogdan încearcă să-şi îndulcească vacanţa mâncând bomboane. Ca să nu exagereze cu bomboanele, mama le-a impus următoarele restricţii:

• Ana mănâncă atâtea bomboane câte zile de vacanţă au fost cu soare până în respectiva zi (inclusiv);

• Bogdan mănâncă în ziua k de vacanţă k bomboane dacă ziua este ploioasă şi niciuna dacă ziua respectivă e cu soare.

Ştiind că vacanţa are $2n$ zile, dintre care n cu soare şi n ploioase, arătaţi că Ana şi Bogdan au mâncat la fel de multe bomboane indiferent de ordinea zilelor ploioase şi însorite.

Admitere Oxford, 2020

Soluţia 1: Vom demonstra că:

1. Dacă ordinea celor $2n$ zile este: întâi n cu soare, apoi n cu ploaie, Ana şi Bogdan mănâncă în total la fel de multe bomboane.
2. Oricum am interverti între ele două zile consecutive, una cu soare cu una ploioasă, cei doi copii vor continua să mănânce în total un număr egal de bomboane.
3. Printr-o succesiune de asemenea intervertiri, se poate ajunge din configuraţia iniţială (cea cu zilele însotite plasate la începutul vacanţei) la orice altă configuraţie constând din n zile cu soare şi n zileploioase.

1. Ana va mânca $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \underbrace{n + n + \ldots + n}_{\text{de } n \text{ ori}}$ bomboane, iar Bogdan va mânca $\underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{\text{de } n \text{ ori}} + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + 2n$ bomboane. Este uşor de văzut că cele două sume sunt egale.

2. Să considerăm o zi ploioasă în care Ana a mâncat a bomboane, iar Bogdan b bomboane, precedată de o zi însorită. Rezultă că în ziua însorită Ana a mâncat tot a bomboane, iar Bogdan 0. Dacă intervertim ordinea celor două zile, făcând ziua ploiasă să preceadă ziua însorită, Ana va mânca $k - 1$ bomboane în ziua ploioasă şi k în cea însorită, iar Bogdan $b - 1$ în cea ploioasă şi 0 în cea însorită. Numărul de bomboane mâncate de cei doi în zilele ce preced acest grup de două zile, precum şi în zilele de după, nu se modifică. Astfel, intervertind, totalul de bomboane scade cu 1 la amândoi. Dacă acesta a fost egal în prima configuraţie, el va rămâne egal şi după intervertire. (Totodată, se vede şi că dacă mutăm, invers, o zi însorită înaintea celei ploiase ce o precede, totalul celor doi creşte cu 1, deci rămâne egal.) Evident, dacă intervertim două zile identice (ambele însorite sau ambele ploioase), nu se schimbă nimic.

3. Pentru a ajunge la configuraţia în care zilele cu soare sunt $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq 2n$ (pornind de la situaţia în care zilele cu soare sunt $1, 2, \ldots, n$ şi) făcând intervertiri între câte două zile consecutive, procedăm astfel:

- facem succesiv rocade între zilele $(n, n + 1)$, $(n + 1, n + 2)$, $\ldots$, $(s_n - 1, s_n)$ până când ziua s_n devine cu soare;

- facem succesiv rocade între zilele $(n-1, n)$, $(n, n+1)$, $\ldots$, $(s_{n-1}-1, s_{n-1})$ până când ziua s_{n-1} devine zi cu soare;
....
- facem succesiv rocade între zilele $(n-j, n-j+1)$, $(n-j+1, n-j+2)$, $\ldots$, $(s_{n-j}-1, s_{n-j})$ până când ziua s_{n-j} devine zi cu soare;
....
- facem succesiv rocade între zilele $(1,2)$, $(2,3)$, $\ldots$, (s_1-1, s_1) până când ziua s_1 devine zi cu soare.
(Mereu se fac $s_k - k \geq 0$ intervertiri.)

Remarcă: În loc de configuraţia iniţială aleasă mai sus, se poate porni de la oricare alta, adaptând etapa 3. De exemplu, dacă sunt n zile ploiase la începutul vacanţei, cei doi vor mânca $1+2+3+\ldots+n+n\cdot 0$ bomboane.

Soluţia 2: (*Ştefan Gobej*)
Notăm zilele cu soare cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, unde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$.
Vom număra mai întâi numărul total de bomboane mâncate de Ana.
• În zilele $1, 2, \ldots, x_1 - 1$ Ana a mâncat 0 bomboane.
• În fiecare din zilele $x_j, x_j+1, \ldots, x_{j+1}-1$ Ana mănâncă j bomboane, deci pe ansamblul acestor zile ea mănâncă $j(x_{j+1} - x_j)$ bomboane. (Asta funcţionează pentru $j = 1, 2, \ldots, n$.)
• În fiecare din zilele $x_n, x_n+1, \ldots, 2n$ Ana mănâncă n bomboane, deci pe ansamblul acestor zile ea mănâncă $n(2n+1-x_n)$ bomboane.
În total, Ana mănâncă $0 + 1\cdot(x_2 - x_1) + 2\cdot(x_3 - x_2) + \ldots + (n-1)(x_n - x_{n-1}) + n\cdot(2n+1-x_n) = n(2n+1) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ bomboane.
Vom număra acum numărul total de bomboane mâncate de Bogdan. Acesta mănâncă în ziua k exact k bomboane, mai puţin în zilele cu soare când nu mănâncă niciuna. Aşadar, el mănâncă în total $1 + 2 + \ldots + 2n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = n(2n+1) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ bomboane.
Aşadar, indiferent de ordinea zilelor, Ana şi Bogdan mănâncă acelaşi număr de bomboane.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre, David Ghibu* şi *Ştefan Gobej*.

Problem of the week no. 264

During the holidays, Ana and Bogdan eat sweets. Their mother imposes the following restrictions:
• Ana eats as many sweets on any day as there have been sunny days during the holiday so far, including the day in question (if sunny)
• Bogdan eats k sweets on day k of the holiday if day k is a rainy day and no sweets on sunny days.
Given that the holidays last $2n$ days and exactly n of them are rainy and the other n days are sunny, prove that Ana and Bogdan ate the same total number of sweets regardless of the order in which the days were rainy/sunny.

Admission Test for Oxford University, 2020

Solution 1: We shall prove the following three facts:
1. In the case when the holidays begin with n sunny days, having the n rainy ones at the end, Ana and Bogdan will eat the same total number of sweets.
2. By swapping two consecutive days, a rainy one with a sunny one, the total number of sweets eaten by the two kids will change in the same way, the two totals remaining equal.
3. By a succession of such swaps, one can get from the initial situation (the one with the n sunny days at the beginning of the holidays) to any configuration of n sunny and n rainy days.

1. Ana eats $1+2+3+\ldots+n+\underbrace{n+n+\ldots+n}_{\text{de } n \text{ ori}}$ sweets, while Bogdan eats $\underbrace{0+0+\ldots+0}_{\text{de } n \text{ ori}}+(n+1)+(n+2)+\ldots+2n$ sweets. It is easy to see that the two sums are equal.

2. Consider a rainy day in which Ana ate a sweets and Bogdan ate b sweets, preceded by a sunny day. In that sunny day Ana must have eaten a sweets, while Bogdan ate 0. If we swap these two days, making the rainy day to precede the sunny one, Ana will eat $k-1$ sweets in the rainy day and k in the sunny one, while Bogdan will eat $b-1$ in the rainy one and 0 in the sunny one. The number of sweets eaten by the two in the days preceding the days we have swapped and in the days following those we have swapped does not change. Thus, swapping decreases by 1 the total amount of sweets consumed both by Ana and Bogdan, which means that if the two totals were equal before the swap, they remain equal after the swap. (Also, it is easy to see that moving, the other way around, a sunny day before a rainy day, the two totals increase by 1, therefore, if the two totals are equal before such a swap, they remain equal after the swap.) Clearly, swapping two identical days (both sunny or both rainy ones) does not change anything.

3. In order to get to the configuration where the sunny days are $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq 2n$ (starting from the configuration in which the sunny days are days $1, 2, \ldots, n$)

by performing swaps between two consecutive days, we proceed as follows:
- we swap $(n, n+1)$, $(n+1, n+2)$, $\ldots$, $(s_n - 1, s_n)$ until day s_n becomes sunny;
- we swap $(n-1, n)$, $(n, n+1)$, $\ldots$, $(s_{n-1} - 1, s_{n-1})$ until s_{n-1} is sunny;
....
- we swap $(n-j, n-j+1)$, $(n-j+1, n-j+2)$, $\ldots$, $(s_{n-j} - 1, s_{n-j})$ until day s_{n-j} becomes sunny;
....
- we swap $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\ldots$, $(s_1 - 1, s_1)$ until s_1 becomes sunny.

Combining the above three points, it follows that irrespective on the order of the rainy and sunny days, the two kids will finish the holidays by eating equally many sweets.

Solution 2: (*Ştefan Gobej*)
Let $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, where $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$, be the sunny days. First, we count the total number of sweets eaten by Ana.
• In days $1, 2, \ldots, x_1 - 1$ Ana eats 0 sweets.
• In each of the days no. $x_j, x_j + 1, \ldots, x_{j+1} - 1$ Ana eats j sweets, which means that on this succession of days she eats $j(x_{j+1} - x_j)$ sweets. (This holds for $j = 1, 2, \ldots, n$.)
• In each of the days $x_n, x_n + 1, \ldots, 2n$ Ana eats n sweets, which means that on this set of consecutive days she eats $n(2n + 1 - x_n)$ sweets.
In total, Ana eats $0 + 1 \cdot (x_2 - x_1) + 2 \cdot (x_3 - x_2) + \ldots + (n-1)(x_n - x_{n-1}) + n \cdot (2n + 1 - x_n) = n(2n+1) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ sweets.
Now we count the total number of sweets eaten by Bogdan. He eats on day k exactly k sweets, unless the day in sunny, in which case he eats none. Thus, in total, he eats $1 + 2 + \ldots + 2n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = n(2n+1) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ sweets.
In conclusion, Ana and Bogdan equally many sweets, irrespective on the order of the holidays.