Problema săptămânii 266:

Numerele reale a şi b satisfac relaţiile: $a^3 = 3ab^2 + 2$ şi $b^3 = 3a^2b + 11$. Aflaţi: $a^2 + b^2$.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Să observăm de la bun început, că în cazul în care numerele $a,b \in \mathbb{R}$, satisfac relaţiile: $a^3 = 3ab^2 + 2$ şi $b^3 = 3a^2b + 11$, atunci $a \neq 0$ şi $b \neq 0 \Rightarrow \boxed{a,b \in \mathbb{R}^*}$.

Ne propunem acum să rezvăm sistemul: $\begin{cases} a^3 = 3ab^2 + 2 \\ b^3 = 3a^2b + 11 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 11 \\ \cdot(-2) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a^3 = 33ab^2 + 22 \\ -2b^3 = -6a^2b - 22 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 11a^3 - 2b^3 = 33ab^2 - 6a^2b \Leftrightarrow 11a^3 + 6a^2b - 33ab^2 - 2b^3 = 0 \Big| \cdot \frac{1}{b^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 33 \cdot \frac{a}{b} - 2 = 0; \quad (1)$$

şi notând acum cu $t := \frac{a}{b}$, ecuaţia (1) devine:

$$11t^3 + 6t^2 - 33t - 2 = 0 \Leftrightarrow 11t^2 \cdot (t+2) - 16t \cdot (t+2) - 1 \cdot (t+2) = 0 \Leftrightarrow (t+2)(11t^2 - 16t - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \quad (2) \quad \text{sau } 11t^2 - 16t - 1 = 0. \quad (3)$$

Aşa că, deosebim următoarele două cazuri:

Cazul 1: Dacă $\frac{a}{b} = -2 \Rightarrow \underline{a = -2b}$ şi înlocuind acum valoarea lui a în ecuaţia $b^3 = 3a^2b + 11$, obţinem că: $b^3 = 3 \cdot (-2b)^2 b + 11 \Leftrightarrow b^3 = 12b^3 + 11 \Leftrightarrow -11b^3 = 11 \Big| : (-11) \Leftrightarrow b^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (b+1) \cdot (b^2 - b + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{b = -1} \text{ sau } b^2 - b + 1 = 0 \Big| \cdot 4 \Leftrightarrow 4b^2 - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{(2b-1)^2 + 3 = 0}}. \quad (3)$$

Afirmaţia (3) este însă falsă $(\forall) b \in \mathbb{R}$.

Aşa că în acest caz, singura soluţie în mulţimea numerelor reale a sistemului iniţial este:

$$(a;b) = (2;-1) \Rightarrow a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = 5}. \blacksquare$$

Cazul 2: Dacă: $11t^2 - 16t - 1 = 0$, atunci avem:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-1) = 256 + 44 = 300 \Rightarrow t_{1;2} = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{2 \cdot 11} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \cdot b \quad (4)$ şi înlocuind această valoare a în ecuaţia $b^3 = 3a^2b + 11$, obţinem că:

$$b^3 = 3\left(\frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11} \cdot b\right)^2 b + 11 \Leftrightarrow b^3 - 3b^3 \cdot \frac{64 \pm 80\sqrt{3} + 75}{121} - 11 = 0 \Big| \cdot 121 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 121b^3 - 3b^3 \cdot (139 \pm 80\sqrt{3}) - 1331 = 0 \Leftrightarrow (121 - 417 \mp 240\sqrt{3}) b^3 = 1331 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(296 \pm 240\sqrt{3}) b^3 = 1331 \Leftrightarrow b^3 = -\frac{1331}{296 \pm 240\sqrt{3}} = -\frac{1331}{8 \cdot (37 \pm 30\sqrt{3})} = -\frac{1331 \cdot (37 \mp 30\sqrt{3})}{8 \cdot \left[37^2 - (30\sqrt{3})^2\right]} =$$

$$= -\frac{1331 \cdot (37 \mp 30\sqrt{3})}{8 \cdot \left[37^2 - (30\sqrt{3})^2\right]} = -\frac{1331 \cdot (37 \mp 30\sqrt{3})}{8 \cdot (1369 - 2700)} = -\frac{1331 \cdot (37 \mp 30\sqrt{3})}{8 \cdot (-1331)} = \frac{37 \mp 30\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b^3 = \frac{37 \mp 30\sqrt{3}}{8}}. \quad (5)$$

Avem însă, din: $(x \mp y\sqrt{3})^3 = 37 \mp 30\sqrt{3} \Leftrightarrow x^3 \mp 3\sqrt{3}x^2 y + 9xy^2 \mp 3\sqrt{3} \cdot y^3 = 37 \mp 30\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$x^3+9xy^2\mp 3\sqrt{3}\cdot\left(x^2y+y^3\right)=37\mp 30\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot\left(x^2+9y^2\right)=37\\ y\cdot\left(x^2+y^2\right)=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases};$$

Prin urmare: $37\mp 30\sqrt{3}=\left(1\mp 2\sqrt{3}\right)^3$. (6)

Verificare: $\underline{\left(1\mp 2\sqrt{3}\right)^3}=1^3\mp 3\cdot 1^2\cdot 2\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2\mp\left(2\sqrt{3}\right)^3=1\mp 6\sqrt{3}+36\mp 24\sqrt{3}=\underline{37\mp 30\sqrt{3}}.$

Ţinând acum seama de relaţiile (4), (5) şi (6) obţinem că:

$$b^3=\frac{37\mp 30\sqrt{3}}{8}=\frac{\left(1\mp 2\sqrt{3}\right)^3}{2^3}\Rightarrow b_{1;2}=\frac{1\mp 2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a_{1;2}=\frac{8\pm 5\sqrt{3}}{11}\cdot b=\frac{8\pm 5\sqrt{3}}{11}\cdot\frac{1\mp 2\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{\left(8\pm 5\sqrt{3}\right)\left(1\mp 2\sqrt{3}\right)}{22}=\frac{8\mp 16\sqrt{3}\pm 5\sqrt{3}-30}{22}=\frac{-22\mp 11\sqrt{3}}{22}=\frac{-2\mp\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a;b)\in\left\{\left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2};\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

În fine, dacă: $(a;b)=\left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow a^2+b^2=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}{4}=$

$$=\frac{4+4\sqrt{3}+3+1-4\sqrt{3}+12}{4}=\frac{20}{4}=5\Rightarrow\boxed{a^2+b^2=5};\ ■■$$

iar dacă: $(a;b)=\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2};\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow a^2+b^2=\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)^2=$

$$=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{4-\cancel{4\sqrt{3}}+3+1+\cancel{4\sqrt{3}}+12}{4}=\frac{20}{4}=5\Rightarrow\boxed{a^2+b^2=5}.\ ■■■$$