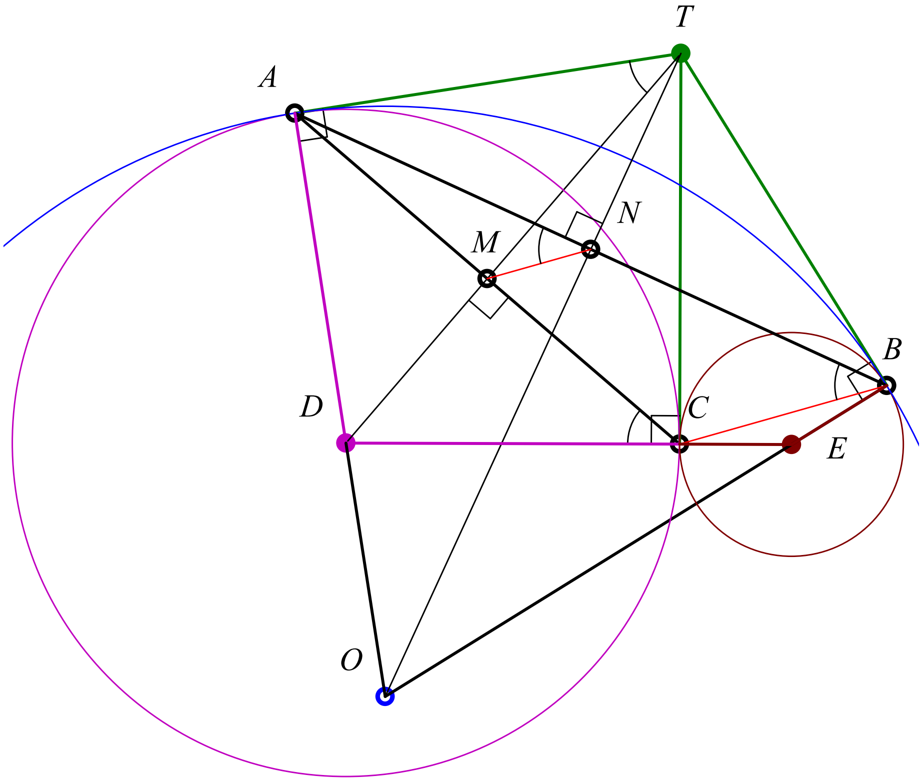
Problema săptămânii 265 (6-12 septembrie 2021):

Cercurile ω_1 şi ω_2 sunt tangente exterior în punctul C. Ele sunt tangente interior la cercul Γ în punctele A şi B. Dacă $D-$ este centrul cercului ω_1, arătaţi că: $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACD}$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând acum cu $T-$centrul radical al celor trei cercuri date (punctul punctul de intersecţie al tangentelor comune duse prin punctele A, B şi $C-$la perechile de cercuri $(\omega_1;\Gamma)$, $(\omega_2;\Gamma)$ şi respectiv$(\omega_1;\omega_2)$); avem: $[TA]\equiv[TB]\equiv[TC]$. (1)

Dacă mai notăm acum cu $E-$centrul cercului ω_2 şi cu $O-$centrul cercului Γ; iar cu: $\{M\}:=[AC]\cap[DT], \{N\}:=[AB]\cap[OT]$; atunci din:

$$\left.\begin{array}{r}[DA]\equiv[DC]\\ [TA]\equiv[TC]\,(1)\end{array}\right\}\Rightarrow DT-\textit{este mediatoarea segmentului}\,[AC]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}[MA]\equiv[MC];\quad (2)\\ DT\perp AC;\quad (3)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}[OA]\equiv[OB]\\ [TA]\equiv[TB]\,(1)\end{array}\right\}\Rightarrow OT-\textit{este mediatoarea segmentului}\,[AB]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}[NA]\equiv[NB];\quad (4)\\ OT\perp AB;\quad (5)\end{array}\right.$$

iar din:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}[MA]\equiv[MC]\,(2)\\ [NA]\equiv[NB]\,(4)\end{array}\right\}\Rightarrow MN-\textit{linie mijlocie în}\ \Delta ACB\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\underline{\widehat{ANM}}\\ \left.\begin{array}{r}AC\perp DT\,(3)\\ OT\perp AB\,(5)\end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\widehat{AMT}\right)=m\left(\widehat{ANT}\right)=90^0\Rightarrow AMNT-\textit{inscriptibil}\Rightarrow\underline{\widehat{ANM}}\equiv\widehat{ATD}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\underline{\underline{\widehat{ATD}}}.\quad (6)$$

Pe de altă parte, din faptul că dreptele AT şi $CT-$sunt tangente la cercul Γ, având centrul în punctul D, obţinem că:

$$\left.\begin{array}{r}AT\perp AD\\ CT\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow m\left(\widehat{TAD}\right)+m\left(\widehat{TCD}\right)=180^0\Rightarrow TADC-\textit{inscriptibil}\Rightarrow\underline{\underline{\widehat{ATD}}}\equiv\widehat{ACD}.\quad (7)$$

În fine, din relaţiile (6) şi (7), rezultă că: $\boxed{\widehat{ABC}\equiv\widehat{ACD}}$. ■