Problema 1

Se consideră teraedrul echifacial *ABCD* (tetraedru în care muchiile opuse sunt congruente), cu $AD = BC = a, \quad AB = CD = b,\ AC = BD = c.$

a) În planul (BCD), prin vârfurile B, C, D se duc paralele la laturile CD, BD, respectiv BC, care determină triunghiul *MNP*. Să se demonstreze că dreptele AM, AN şi AP sunt perpendiculare două câte două.

b) Demonstraţi că există un tetraedru echifacial având muchiile de lungimi *a*, *b*, *c* dacă şi numai dacă *a*, *b*, *c* sunt lungimi ale unui triunghi ascuţitunghic.

ONM 1989

Soluţie

a) În triunghiul AMN, *AD* este mediană şi e jumătate din *MN*, deci $AM \perp AN$. Analog celelalte relaţii.

b) Dacă există un tetraedru echifacial având muchiile de lungimi *a*, *b*, *c*, atunci, din a) $AMNP$ este tetraedru tridreptunghic deci MNP este triunghi ascuţitunghic cu laturile $2a, 2b, 2c$ de unde rezultă cerinţa.

Reciproc. Considerăm triunghiul *ABC* ascuţitunghic, cu laturile de lungimi *a*, *b*, *c*. În planul *ABC* punctul considerăm punctul *A'* de aceeaşi parte a lui *A* faţă de *BC* astfel încât $\Delta ABC \equiv \Delta A'CB$. Rotim triunghiul $A'BC$ în jurul laturii *BC* până când segmentul *AA'* este egal cu *a*. În acest moment $A'BCA$ este tetraedru echifacial.

Trebuie arătat că dacă triunghiul *ABC* este dreptunghic sau obtuzunghic, atunci nu se poate construi un asemenea tetraedru.

Dacă $A = 90^\circ$, atunci punctul *A* se află pe sfera de diametru $BC = a$ şi nu există un alt punct *A'* pe această sferă astfel încât $A'BCA$ să fie tetraedru echifacial.

Dacă $A > 90^\circ$ atunci punctul *A* se află în interiorul sferei de diametru $BC = a$ şi nu există un alt punct *A'* în interiorul acestei sfere sferă astfel încât $A'BCA$ să fie tetraedru echifacial.

Problema 2

Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu toate unghiurile diedre dintre feţe ascuţite şi *P* un punct în interiorul tetraedrului. Determinaţi punctul *P* ştiind că suma

$\frac{S_{BCD}}{d(P,(BCD))}+\frac{S_{ACD}}{d(P,(ACD))}+\frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}+\frac{S_{ABD}}{d(P,(ABD))}$ este minimă, unde S_{ABC} este aria triunghiului *ABC*, iar $d(P,(ABC))$ este distanţa de la punctul *P* la planul *ABC*.

ONM 1986

Soluţie.

Din inegalitatea CBS avem

$$\left(\sum \frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}\right)\left(\sum S_{ABC}\cdot d(P,(BCA))\right) \geq \left(\sum \sqrt{\frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}}\cdot\sqrt{S_{ABC}\, d(P,(ABC))}\right)^2 \Rightarrow$$

$\left(\sum \frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}\right)(3V_{ABCD}) \geq \left(\sum S_{ABC}\right)^2 \Rightarrow \sum \frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))} \geq \frac{\left(\sum S_{ABC}\right)^2}{3V_{ABCD}}$ care este constantă,

deci $\sum \frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}$ este minimă când avem egalitate, adică când

$d(P,(ABC)) = d(P,(ACD)) = d(P,(BCD)) = d(P,(ABD)) \Rightarrow$ *P* este centrul sferei înscrise în tetraedru.

Problema 3

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că printre $(n+1)$ numere alese din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ cu $2n$ elemente, există două astfel încât unul îl divide pe celălalt.

* * *

Soluţie

Pentru $n = 1$ este evident.

Considerăm $n \geq 2$. Cele $n+1$ numere se scriu sub forma $2^{a_i} b_i$, $i = \overline{1, n+1}$ cu b_i numere impare, pentru orice $i = \overline{1, n+1}$. Cum înmulţimea $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ sunt n numere impare, rezultă că cel puţin două sunt egale. Fie acestea b_p şi b_q, deci unul dintre numerele $2^{a_p} b_p$ şi $2^{a_q} b_q$ îl divide pe celălalt.

Problema 4

Fie cifrele nenule a şi b şi n un număr natural nenul. Demonstraţi că numărul $\overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}b}$ nu este pătrat perfect.

Aurel Bârsan

Soluţie

Presupunem, prin absurd, că $x = \overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}b}$ este pătrat perfect, deci $b \in \{1,4,5,6,9\}$.

Dacă $b \in \{5,6\} \Rightarrow x \in \{M_{25}+5, M_4+2\}$ contradicţie.

Dacă $b = 1 \Rightarrow x = \overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}1} = (2k+1)^2 \Rightarrow a\cdot 2^{n-1}\cdot 5^{n+1} = k(k+1)$ şi cum $(k,k+1)=1 \Rightarrow k = a_1 2^{n-1}$, $k+1 = a_2 5^{n+1}$, $(a_1,a_2)=(a_1,5)=(a_2,2)=1$. Avem $a_2 5^{n+1} - a_1 2^{n-1} \geq 5^{n+1} - 9\cdot 2^{n-1} \geq 16$ (*) contradicţie.

Dacă $b = 4 \Rightarrow \overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}4} = (2k)^2 \Rightarrow a\cdot 2^{n-1}\cdot 5^{n+1} = (k-1)(k+1)$.

Dacă $(k-1,k+1)=1$ avem $k-1 = a_1\cdot 2^{n-1}$, $k+1 = a_2\cdot 5^{n+1}$ şi din (*), contradicţie .

Dacă $(k-1,k+1)=2 \Rightarrow k = 2l+1$, de unde rezultă că $a.\cdot 2^{n-3}5^{n+1} = l(l+1)$, deci $l = a_1\cdot 2^{n-3}$, $l+1 = a_2\cdot 5^{n+1}$, din nou contradicţie, din (*).

Dacă $b = 9 \Rightarrow \overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}9} = (2k+1)^2 \Rightarrow a\cdot 2^{n-1}\cdot 5^{n+1} = (k-1)(k+2)$.

Dacă $(k-1,k+2)=1 \Rightarrow k-1 = a_1\cdot 2^{n-1}$, $k+2 = a_2\cdot 5^{n+1}$ şi din (*) obţinem contradicţie.

Dacă $(k-1,k+2)=3 \Rightarrow k = 3l+1 \Rightarrow a\cdot 2^{n-1}\cdot 5^{n+1} = 9l(l+1) \Rightarrow a = 9, l = 2^{n-1}, l+1 = 5^{n+1}$ din nou contradicţie cu relaţia asemănătoare cu (*).