Problema 1

Se consideră teraedrul echifacial $ABCD$ (tetraedru în care muchiile opuse sunt congruente), cu $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, $AC = BD = c$.

a) În planul (BCD), prin vârfurile B, C, D se duc paralele la laturile CD, BD, respectiv BC, care determină triunghiul *MNP*. Să se demonstreze că dreptele AM, AN şi AP sunt perpendiculare două câte două.

b) Demonstraţi că există un tetraedru echifacial având muchiile de lungimi *a*, *b*, *c* dacă şi numai dacă *a*, *b*, *c* sunt lungimi ale unui triunghi ascuţitunghic.

Problema 2

Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu toate unghiurile diedre dintre fețe ascuțite şi P un punct în interiorul tetraedrului. Determinaţi punctul P ştiind că suma

$$\frac{S_{BCD}}{d(P,(BCD))}+\frac{S_{ACD}}{d(P,(ACD))}+\frac{S_{ABC}}{d(P,(ABC))}+\frac{S_{ABD}}{d(P,(ABD))}$$

este minimă, unde S_{ABC} este aria triunghiului ABC, iar $d(P,(ABC))$ este distanţa de la punctul P la planul ABC.

Problema 3

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că printre $(n+1)$ numere alese din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ cu $2n$ elemente, există două astfel încât unul îl divide pe celălalt.

Problema 4

Fie cifrele nenule a şi b şi n un număr natural nenul. Demonstraţi că numărul $\overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ ori}}b}$ nu este pătrat perfect.