Problema 1

Se consideră A o mulţime de numere reale cu cel puţin trei elemente având proprietatea că, pentru orice $a;b \in A$ cu $a \neq b$ avem $a^3 + b \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că $A \subset \mathbb{Q}$.

Ilie Romeo

Soluţie

Fie $a,b,c \in A$ distincte.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} a^3 + c \in \mathbb{Q} \\ b^3 + c \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow a^3 - b^3 \in \mathbb{Q} \\ \left.\begin{array}{l} c^3 + a \in \mathbb{Q} \\ c^3 + b \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q} \quad (1) \end{array}\right\} \overset{a \neq b}{\Rightarrow} a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a-b)^2 + 3ab \in \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{Q} \quad (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} a^3 + b \in \mathbb{Q} \\ b^3 + a \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1) \in \mathbb{Q} \underset{a^2 - ab + b^2 + 1 \neq 0}{\overset{(2);(3)}{\Rightarrow}} a + b \in \mathbb{Q} \overset{(1)}{\Rightarrow} a \in \mathbb{Q}.$$

Cum $a \in A$ a fost arbitrar ales, avem că $A \subset \mathbb{Q}$.

Problema 2

Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Demonstraţi că planele $(A'BC)$ şi $(C'AB)$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $2AA' = \sqrt{6}AB$.

Ilie Romeo

Soluţie

Dacă D este centrul feţei $ACC'A'$ atunci $(A'BC) \cap (C'AB) = BD$.

Centrul de greutate al triunghiului $A'BC$, notat cu P, coincide cu centrul de greutate al triunghiului $C'AB$ şi se va afla la intersecţia dintre dreptele AN şi CM, unde N este mijlocul lui BC, iar M este mijlocul lui AB.

Dacă $Q = pr_{BD}M = pr_{BD}N$, atunci $\sphericalangle((A'BC),(C'AB)) = \sphericalangle MQN$.

În triunghiurile dreptunghice PMB şi PBN avem $MQ^2 = NQ^2 = \dfrac{PN^2 \cdot BN^2}{BP^2}$.

Planele $(A'BC)$ şi $(C'AB)$ sunt perpendiculare $\Leftrightarrow$ $\Delta\, QMN$ este dreptunghic isoscel $\Leftrightarrow$

$$MN^2 = 2\frac{PN^2 \cdot BN^2}{BP^2} \Leftrightarrow BP^2 = 2PN^2 \Rightarrow \Delta PBN \text{ este dreptunghic isoscel} \overset{\text{notând } x=MB}{\Leftrightarrow} A'N = 3x \Leftrightarrow$$

$$A'B = x\sqrt{10} \Leftrightarrow AA' = x\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{AA'}{\sqrt{6}} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 2AA' = \sqrt{6}AB.$$

Problema 3

Se consideră cubul *ABCDA'B'C'D'* de latură 1. Determinaţi minimul expresiei

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))$, atunci când punctul *M* este în interiorul piramidei *ABDA'*, unde $d(M,\alpha)$ este distanţa de la punctul *M* la planul α .

***

Soluţie

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))=AM^2+d^2(M,(A'BD))$.

Considerăm un plan α care trece prin *M* şi este paralel cu planul $(A'BD)$. Orice punct de pe planul α are distanţa până la planul $(A'BD)$ egală cu $d(M,(A'BD))$. Dacă $M'=pr_\alpha A$ şi $T=pr_{(A'BD)}A$ atunci

$d(M,(A'BD))=d(M',(A'BD))$ şi $AM^2+d^2(M,(A'BD))=AM^2+TM'^2$. AM e minima dacă $M=M'$,

deci $AM^2+d^2(M,(A'BD))$ este minimă atunci cănd punctele *A*, *M'* şi *T* sunt coliniare şi $M=M'$. Pe de altă parte, AM^2+MT^2 este minimă dacă *M* este mijlocul lui *AT* deci,

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))$, este minimă când *M* este mijlocul perpendicularei din *A* pe planul $(A'BD)$, si cum $d(A,(A'BD))=\frac{1}{3}AC'$ obţinem că minimul cerut este egal cu

$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{6}$.

Problema 4

a) Considerăm numerele întregi x, y şi q, cu $y \neq 0$ şi $q \geq 2$. Arătaţi că, dacă fracţia $\frac{q^x - 1}{q^y - 1}$ este un număr întreg, atunci y divide x.

b) Pentru fiecare număr prim q, definim mulţimea $M_q = \left\{ \frac{q^x - 1}{q^y - 1} \mid x, y \in \mathbb{Z},\ y \neq 0 \right\}$. Notăm cu M reuniunea tuturor acestor mulţimi M_q. Determinaţi cel mai mic număr natural *n*, $n > 2$ care nu aparţine mulţimii *M*.

Cătălin Ciupală

Soluţie

Fie x, y şi q, cu $y \neq 0$ şi $q \geq 2$. Notăm $f = \frac{q^x - 1}{q^y - 1}$.

Dacă $x = 0 \Rightarrow f = 0$. Evident $y \mid 0$.

Dacă $x, y > 0$, din teorema împărţirii cu rest, există $c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = yc + r$ şi $r < y$. Avem

$$f = q^r \frac{q^{yc} - 1}{q^y - 1} + \frac{q^r - 1}{q^y - 1} = \begin{cases} \frac{q^r - 1}{q^y - 1}, & \text{pentru } c = 0 \\ q^r \left(1 + q^y + \ldots + q^{y(c-1)}\right) + \frac{q^r - 1}{q^y - 1}, & \text{pentru } c > 0 \end{cases}$$

şi cum $\frac{q^r - 1}{q^y - 1} \in (0,1)$ pentru $r > 0$, rezultă că $f \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $r = 0$ sau $y \mid x$.

Dacă $x < 0$ şi $y > 0$, atunci $f \in (-1, 0)$.

Dacă $x > 0$ şi $y < 0$, notăm $y = -v \in \mathbb{N}^*$ şi avem $f = -q^v \frac{q^x - 1}{q^v - 1}$ şi cum $\left(q^v, q^v - 1\right) = 1$, rezultă că $f \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $v \mid x \Rightarrow y \mid x$.

Dacă $x, y < 0$ notăm cu $x = -u \in \mathbb{N}^*$; $y = -v \in \mathbb{N}^*$ şi obţinem $f = q^{v-u} \frac{q^u - 1}{q^v - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow v \geq u$ şi $v \mid u \Rightarrow v = u \Rightarrow x = y$.

b) Din analiza de la punctul *a*), rezultă că mulţimea *M* conţine, în afară de 0 şi 1), numerele naturale (mai mari decât 2): $1 + q^y + q^{2y} + \ldots + q^{ky}$, unde $k, y \in \mathbb{N}^*$ şi q număr prim.

$3 = 1 + 2 \in M_2$; $4 = 1 + 3 \in M_3$; $5 = 1 + 2^2 \in M_2$; $6 = 1 + 5 \in M_5$; $7 = 1 + 2 + 2^2 \in M_2$; $8 = 1 + 7 \in M_7$;

$9 = 1 + 2^3 \in M_2$; $10 = 1 + 3^2 \in M_3$ în schimb $11 \notin M$, deci numărul cerut este egal cu 11.