1) Determinați toate perechile de numere prime (p, q) pentru care

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2$$

***

Soluție

Presupunem că niciunul dintre p sau q nu este egal cu 3. Atunci $p = 3k+1$ sau $3k+2$ și $q = 3k+1$ sau $3k+2$.

Dacă p și q ar fi de aceeași formă $3k+1$ sau $3k+2$ atunci 3 divine $p^3 - q^5$ și 3 nu divide $(p+q)^2$.

Dacă p și q ar fi de forme $3k+1$ sau $3k+2$ atunci 3 nu divine $p^3 - q^5$ și 3 divide $(p+q)^2$.

Dacă $p = 3$ atunci $q^5 < 27$ ceea ce nu este posibil.

Dacă $q = 3$ obținem $p^3 - 243 = (p+3)^2$, ecuație cu unica soluție întregă $p = 7$.

2) Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$, arătați că $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{3}{2}$

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu

Soluție

Are loc: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{a+1}+1-\frac{1}{b+1}+1-\frac{1}{c+1}=1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$.

Din inegalitatea *CBS* pentru numerele $\sqrt{\frac{a}{a+1}}, \sqrt{\frac{b}{b+1}}, \sqrt{\frac{c}{c+1}}$, respectiv $\sqrt{a+1}, \sqrt{b+1}, \sqrt{c+1}$ avem:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\right)\left((a+1)+(b+1)+(c+1)\right)$$

de unde $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le a+b+c+3$ și de aici inegalitatea cerută $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{3}{2}$.

3) Se consideră un cub cu centrul de simetrie în O şi un plan variabil ce trece prin O şi care este paralel cu o muchie a cubului. Arătaţi că suma pătratelor distanţelor vârfurilor cubului la acest plan este constantă.

Florin Cârjan

Notăm $ABCDA'B'C'D'$ cubul şi α planul care trece prin O, pe care îl considerăm paralel cu AA' ; mai mult, dacă $\alpha \cap (ABCD) = d$ şi $M = pr_\alpha A$; $N = pr_\alpha B$ atunci $AM ; DN \subset (ABCD)$.

$d(B,\alpha) = d(B',\alpha) = d(D,\alpha) = d(D',\alpha) = DN$ şi $d(A,\alpha) = d(A',\alpha) = d(C,\alpha) = d(C',\alpha) = AM$.

Din cele de mai sus avem că suma distanţelor vârfurilor cubului la acest plan α este egală cu $4\left(AM^2 + DN^2\right) = 4\left(AO^2 - OM^2 + DN^2\right) = 4AO^2$, pentru că $OM \equiv DN$.

4) Arătaţi că dacă toate cele şase unghiuri ale unui tetraedru sunt ascuţite, atunci suma cosinusurilor acestor unghiuri este mai mică sau egală cu 2.

* * *

Soluţie

Cum cele 6 unghiuri diedre sunt ascuţile rezultă că proiecţiile celor patru vârfuri pe planele opuse sunt în interioarele triunghiurilor feţelor opuse.

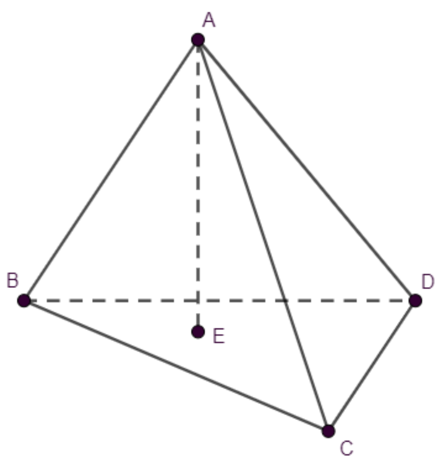
Notăm $\alpha_1 = \sphericalangle((ABC),(BCD))$; $\alpha_2 = \sphericalangle((ADC),(BCD))$;

$\alpha_3 = \sphericalangle((ABD),(BCD))$; $\alpha_4 = \sphericalangle((ABC),(BAD))$;

$\alpha_5 = \sphericalangle((ABD),(ACD))$; $\alpha_6 = \sphericalangle((ADC),(BCA))$.

$$\cos\alpha_1 = \frac{S_{BCE}}{S_{ABC}};\cos\alpha_2 = \frac{S_{DEC}}{S_{DAC}};\ \cos\ \alpha_3 = \frac{S_{DEB}}{S_{ABD}}\ \Rightarrow$$

$$S_{BCD} = S_{BEC} + S_{CED} + S_{BDE} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}}\cos\alpha_1 + \frac{S_{ADC}}{S_{BCD}}\cos\alpha_2 + \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}\cos\alpha_3 = 1$$ şi încă trei sume similare.



Adunând toate relaţiile şi ţinând cont că toate unghiurile $\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4$ sunt ascuţile, obţinem

$$4 = \Sigma\left(\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} + \frac{S_{BCD}}{S_{ABC}}\right)\cos\alpha_1 \ge 2\Sigma\cos\alpha_1$$ de unde rezultă cerinţa.