Problema 1)

a) Determinaţi cel mai mic număr de forma $\frac{\overline{ab}}{c}+\frac{\overline{bc}}{a}+\frac{\overline{ca}}{b}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr de forma $\frac{a}{\overline{bc}}+\frac{b}{\overline{ca}}+\frac{c}{\overline{ab}}$.

Cătălin Ciupală

Soluţie. a) $\frac{\overline{ab}}{c}+\frac{\overline{bc}}{a}+\frac{\overline{ca}}{b}=10\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\geq 33$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

b) $\frac{a}{\overline{bc}}+\frac{b}{\overline{ca}}+\frac{c}{\overline{ab}}=\frac{a^2}{a\cdot\overline{bc}}+\frac{b^2}{b\cdot\overline{ca}}+\frac{c^2}{c\cdot\overline{ab}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a\cdot\overline{bc}+b\cdot\overline{ca}+c\cdot\overline{ab}}=\frac{(a+b+c)^2}{11(ab+bc+ac)}\geq\frac{3}{11}$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

Problema 2)

Determinaţi numerele intregi x, y, z pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

* * *

Soluţie

Observaţia 1) Dacă unul dintre numere este egal cu 0, atunci toate sunt egale cu 0 şi că $x = y = z = 0$ este soluţie pentru ecuaţia dată .

Observaţia 2) x, y, z nu pot fi toate impare sau doar unul dintre ele impar

Într-adevăr, dacă două dintre ele ar fi impare şi al treilea ar fi număr par, atunci membrul stâng ar fi număr par nedivizibil cu 4, iar membrul drept ar fi multiplu de 4, de unde rezultă că nu putem avea egalitate.

În consecinţă toate cele trei numere x, y, z trebuie să fie pare. Luăm $x = 2^{x_1} x_2$; $y = 2^{y_1} y_2$; $z = 2^{z_1} z_2$, unde x_2, y_2, z_2 sunt impare. Fără a restrânge generalitatea putem considera că $x_1 \le y_1 \le z_1$.

Dacă $x_1 < y_1 \Rightarrow$ ecuaţia din enunţ se scrie: $2^{2x_1} x_2^2 + 2^{2y_1} y_2^2 + 2^{2z_1} z_2^2 = 2^{1+x_1+y_1+z_1} x_2 y_2 z_2 \Rightarrow$ $x_2^2 + 2^{2(y_1-x_1)} y_2^2 + 2^{2(z_1-x_1)} z_2^2 = 2^{1+y_1-x_1+z_1} x_2 y_2 z_2$.................(1) ceea ce este imposibil.

Deci $x_1 = y_1$, iar dacă $y_1 < z_1$ atunci, printr-un raţionament analog cu cel anterior, nu avem soluţii. În consecinţă, $x_1 = y_1 = z_1$ şi, în acest caz, relaţia (1) devine: $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 2x_2 y_2 z_2$, ceea ce este imposibil (conform cu observaţia 2).

În final, $x = y = z = 0$ este singura soluţie a ecuaţiei.

Problema 3)

Un cub este format din $43 \times 43 \times 43$ cubuleţe mici. Spunem că două astfel de cubuleţe sunt vecine dacă au o faţă comună. Este posibil ca un şoricel să parcurgă toate cubuleţele cubului mare, plecând dintr-un colţ al cubului mare, să ajungă la cubuleţul din centrul cubului mare, fiecare cubuleţ să fie parcurs o singură dată, iar trecerea de la un cubuleţ la altul să se facă doar dacă acestea sunt vecine?

Cătălin Ciupală

Soluţie

Colorăm fiecare cubuleţ al cubului mare în alb şi negru astfel încât două cubuleţe vecine să fie de culori diferite. Şoricelul, când trece de la un cubuleţ la altul, va alterna culorile. Toate cubuleţele din colţuri ale cubului mare au aceeaşi culoare, o luăm albă. Cubuleţul din mijloc este negru. Numărul de cubuleţe albe este cu 1 mai mult decât al celor negre. Dacă şoricelul pleacă dintr-un cubuleţ alb atunci, după ce va trece prin toate cubuleţele cubului mare, va ajunge în final tot într-un cub alb. Din cele considerate anterior, rezultăcă este nu este posibil ca şoricelul să ajungă la cubuleţul din centrul cubului mare.

Problema 4)

Se consideră prisma triunghiulară *ABCA'B'C'* dreaptă, punctele $D \in (AA')$; $E \in (BB')$; $C \in (CC')$ şi punctul S în interiorul prismei. Notăm $\{M\} = SD \cap (BCC')$; $\{N\} = SE \cap (ACC')$ şi $\{P\} = SF \cap (ABB')$.

Arătaţi că $\frac{SM}{DM} + \frac{SN}{EN} + \frac{SP}{PF} = 1$.

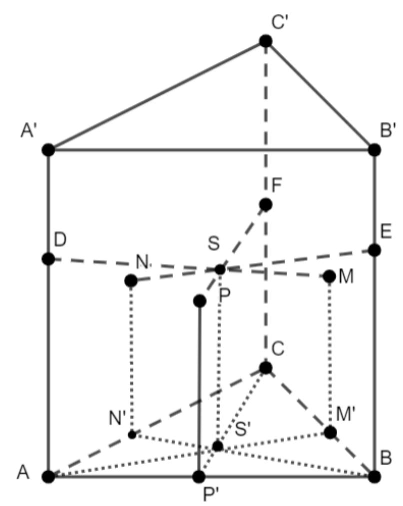
Concursul "Laurenţiu Duican" 1996

Soluţie

Considerăm

$P' = pr_{(ABC)}P$; $M' = pr_{(ABC)}M$; $N' = pr_{(ABC)}N$;

$S' = pr_{(ABC)}S$



$$\frac{SM}{DM} + \frac{SN}{EN} + \frac{SP}{PF} = \frac{M'S'}{AM'} + \frac{N'S'}{BN'} + \frac{P'S'}{P'C} =$$

$$\frac{d(S',BC)}{d(A,BC)} + \frac{d(S',AC)}{d(B,AC)} + \frac{d(S',AB)}{d(C,AB)} =$$

$$\frac{\sigma[S'BC]}{\sigma[ABC]} + \frac{\sigma[S'AC]}{\sigma[ABC]} + \frac{\sigma[S'AB]}{\sigma[ABC]} = 1,$$

unde prin $\sigma[XYZ]$ am notat aria triunghiului XYZ.