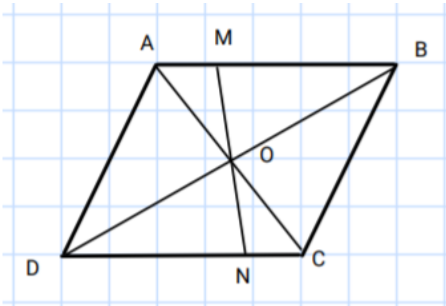
Problema 1

Se consideră patrulaterul $ABCD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Arătaţi că *ABCD* este paralelogram dacă şi numai dacă orice dreaptă *d* care trece prin punctul *O* împarte patrulaterul *ABCD* în două figuri geometrice de arii egale.

Cătălin Ciupală

Soluţie.

Luăm cazul în care dreapta $d = AC \Rightarrow A_{ABC} = A_{ADC} \Rightarrow d(D, AC) = d(B, AC) \Rightarrow O$ este mijlocul lui *BD*. Analog, în cazul în care $d = BD \Rightarrow O$ este mijlocul lui *AC*. În consecinţă, *ABCD* este paralelogram.



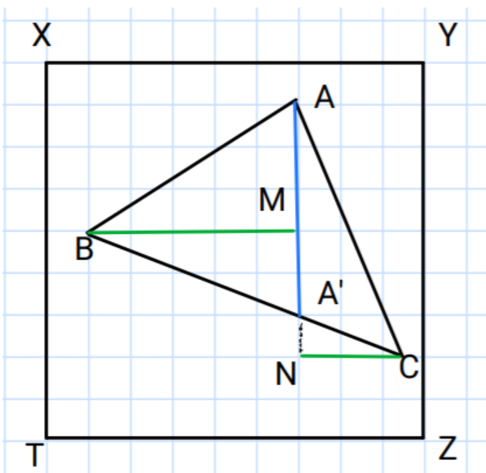
Reciproc. Dacă *ABCD* este paralelogram şi $M \in (AB); N \in (CD); O \in MN$ atunci trapezele $AMND$ şi $CNMB$ sunt congruente deci, au aceeaşi arie. Cazul în care dreapta *d* este una dintre diagonale, cerinţa este imediată.

Problema 2

a) Arătaţi că, orice triunghi aflat în interiorul unui dreptunghi (incluzând laturile), are aria cel mult jumătate din aria dreptunghiului.

b) Arătaţi că, oricum am considera $(2n+1)^2$ puncte în interiorul unui pătrat de latură *n*, există un triunghi cu vârfurile în mulţimea formată de cele nouă puncte de arie cel mult egală cu $\frac{1}{2}$.

Soluţie.



a) Considerăm figura alăturată în care *XYZT* este dreptunghiul considerat şi triunghiul *ABC* se află în interiorul dreptunghiului (incluzând laturile). Considerăm vârful *A* al triunghiului astfel încât dreapta $AA' \parallel YZ$ cu $A' \in (BC)$.

$$A_{ABC} = A_{ABA'} + A_{ACA'} = \frac{BM \cdot AA'}{2} + \frac{CN \cdot AA'}{2} \le \frac{1}{2} A_{dreptunghi}$$

b) Împărţim pătratul de latură *n* în n^2 pătrăţele de latură 1. Cum $(2n+1)^2 > 2n^2 + 1 \Rightarrow$ există cel puţin trei puncte în acelaşi pătrat de latură 1.

Cum aria oricărui triunghi cu vârfurile în interiorul unui pătrat de latură 1 este cel mult egală cu $\frac{1}{2}$, rezultă cerinţa.

Problema 3 În planul xOy considerăm punctul $A\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$. Arătaţi că orice cerc cu centrul în A conţine cel mult un punct cu ambele coordonate numere întregi.

Soluţie

Presupunem contrariul, deci se găsesc cel puţin două puncte $M\left(a,b\right)$ şi $N\left(c,d\right)$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ şi $AM=AN$.

$$AM^2=AN^2=R^2\Rightarrow\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=\left(c-\sqrt{2}\right)^2+\left(d-\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow$$

$$a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}=c^2+d^2-2c\sqrt{2}-2d\sqrt{3}\Rightarrow a=c \text{ si } b=d\Rightarrow M=N$$

Problema 4

Determinaţi numerele întregi x şi y care verifică relaţia $2^x - 3^y = 7$.

Concursul APMC 1993

Soluţie

Evident x şi y sunt numere naturale.

$$3^y + 7 = 2^x = (3-1)^x = M_3 + (-1)^x \Rightarrow x \text{ este număr par} \Rightarrow x = 2x_1;\ x_1 \in \mathbb{N}^*$$

$$3^y = 2^x - 7 = (4-1)^y = M_4 + (-1)^y \Rightarrow y \text{ este număr par} \Rightarrow y = 2y_1;\ y_1 \in \mathbb{N}^*$$

Ecuaţia se rescrie $\left(2^{x_1} - 3^{y_1}\right)\left(2^{x_1} + 3^{y_1}\right) = 7 \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = 1 \Rightarrow (x, y) = (4, 2)$.

Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (x, y) = (3, 0)$.